Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

UNIVERSIDADE DE LISBOA

Problemas de equações elípticas do tipo côncavo-convexo

Gonçalo Santos Montalvão Carvalho

Dissertação
Mestrado em Matemática

Lisboa, Setembro de 2014

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Problemas de equações elípticas do tipo côncavo-convexo

Gonçalo Santos Montalvão Carvalho

Dissertação
Mestrado em Matemática

Orientadora: Professora Ana Rute do Nascimento Mendes Domingos

Lisboa, Setembro de 2014

Resumo

Nesta dissertação é estudada a existência e não existência de soluções para uma classe de problemas do tipo côncavo-convexo, como por exemplo o problema que se segue

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, com fronteira Γ regular, $N \geq 3$, $\lambda > 0$ e $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$. Os resultados são provados por dois métodos diferentes. O primeiro usando sub e sobre soluções e métodos variacionais, seguindo os artigos de de Figueiredo, Gossez e Ubilla [15] e [16]. O segundo usando a variedade de Nehari e as *fibering maps*, seguindo o artigo de Brown e Wu [11].

Palavras-chave: equações elípticas; sub e sobresoluções; Teorema da passagem da montanha; expoente crítico de Sobolev; variedade de Nehari; *fibering map*.

Abstract

In this thesis we study the existence and nonexistence of solutions for a family of problems like

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is bounded domain with smooth boundary Γ, $N \geq 3$, $\lambda > 0$ and $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$. The results are proved by two different methods. The first one using upper and lower solutions and variational methods, following the articles of de Figueiredo, Gossez and Ubillla [15] and [16]. The second one using the Nehari manifold and the fibering maps, following the article of Brown and Wu [11].

Keywords: semilinear elliptic problem; upper and lower solutions; mountain pass Theorem; Sobolev critical exponent; Nehari manifold; fibering map.

Agradecimentos

Chegou agora ao fim a minha etapa académica, na qual passei grande parte do tempo na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É com grande alegria que me despeço dos bons tempos que aqui passei, dos colegas que conheci e dos professores que tive. Ficam as matérias estudadas e algumas já esquecidas, os almoços e jantares na 'Velha', o gabinete de mestrados e a grandiosa passagem por Milão e pela *Università di Milano-Bicocca*. Em especial queria agradecer à Professora Ana Rute Domingos, que me orientou nestes dois últimos anos, sempre com bom humor e exigência método de estudo.

À minha mãe e ao meu irmão

Conteúdo

Notação

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$: aberto de $\mathbb{R}^N$.
2. $\Gamma = \partial\Omega$: fronteira de Ω.
3. u_{x_i}: derivada de u em ordem a x_i.
4. $\nabla u = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_N})$: gradiente de u.
5. $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$: Laplaciano de u.
6. $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}$: norma do espaço $L^p(\Omega)$ para $p \in [1, \infty)$.
7. $\|u\|_\infty$: norma do espaço $L^\infty(\Omega)$.
8. $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}$: norma do espaço $H_0^1(\Omega)$.
9. $(\cdot, \cdot)$: produto interno associaddo à norma $\| \cdot \|$.
10. $|\Omega|$: medida de Lebesgue de Ω.
11. p': conjugado de Hölder de p, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
12. $2^* = \frac{2N}{N-2}$: expoente crítico de Sobolev.
13. $u^+ = \max\{0, u\}$: parte positiva de u.
14. $u^- = \min\{0, u\}$: parte negativa de u.
15. $C \in \mathbb{R}$: constante arbitrária.
16. $R > 0$: raio duma bola arbitrária.
17. $\lambda_1(\Omega)$: primeiro valor próprio de $-\Delta$ em Ω.
18. φ_1: primeira função própria positiva de $-\Delta$ em Ω.
19. $\boldsymbol{\nu}$: normal unitária exterior a Ω.
20. $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = u_{\boldsymbol{\nu}}$: derivada direcional.

Introdução

No ano letivo 2013-2014 tive o meu primeiro contacto com as equações diferenciais não lineares, no trabalho que desenvolvi para a disciplina *Seminário*, que culminou com o estudo do artigo [11] de Kenneth J. Brown e Tsung-Fang Wu, onde é provado a existência de, pelo menos, duas soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, com fronteira Γ regular, $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$, $\lambda > 0$ e $a, b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^∞, que assumem valores positivos em subdomínios de Ω de medida positiva, mas com a possibilidade mudarem de sinal no resto de Ω. Neste artigo os autores usam a denominada *Variedade de Nehari* (introduzida por Z. Nehari em [19] (1960) e [20] (1961)) e as denominadas *Fibering Maps* (introduzidas por P. Drabek e S. I. Pohozaev em [12] (1997)).

Este problema faz parte de uma classe de problemas denominados por *problemas côncavo-convexos*, cujo trabalho pioneiro se deve a A. Ambrosetti, H. Brezis e G. Cerami no artigo [2], onde a parte não linear da equação exibe a soma de duas potências, uma com expoente maior que um e outra com expoente menor que um, conferindo à equação propriedades distintas dos problemas cuja equação só envolve um dos tipos das potências.

Em [10], H. Brezis e L. Oswald provam que $-\Delta u = \lambda u^q$ em Ω, $u = 0$ sobre Γ, com $0 < q < 1$, admite uma única solução positiva, por técnicas de minimização. Em 1973, no artigo [4] de A. Ambrosetti e P. Rabinowitz, são desenvolvidos métodos variacionais (Teorema da Passagem da Montanha), com os quais é possível provar a existência de uma solução positiva para o problema $-\Delta u = \lambda u + u^p$ em Ω, com $p \in (1, 2^* - 1)$ e com condições de Dirichlet sobre a fronteira. Resultados de existência quando $p = 2^* - 1$ foram obtidos em 1983, por H. Brezis e L. Nirenberg em [8]. Tenhamos em atenção que neste caso a respetiva injeção de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ não é compacta, o que se traz dificuldades acrescidas, nomeadamente na obtenção de condições de compacidade (cf. Lema 1.4.12 - condição de Palais-Smale).

Em 1994, em [2], A. Ambrozetti, H. Brezis e G. Cerami, consideram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

donde provam a existência de uma constante Λ positiva tal que para cada $\lambda < \Lambda$, o problema com $0 < q < 1 < p$, tem, pelo menos, uma solução positiva, via sub e sobresoluções; e caso $\lambda > \Lambda$ provam que o problema não tem soluções positivas. Provam ainda a existência de uma segunda solução, pelo Teorema da Passagem da Montanha, quando $p \leq 2^* - 1$.

Posteriormente, em 2003, D. de Figueiredo, J.-P. Gossez e P. Ubilla obtêm os resultados de [2], em [15], para o caso subcrítico ($p < 2^* - 1$), considerando problemas mais gerais, tais como

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x) u^q + b(x) u^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, com fronteira Γ regular, $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$, $\lambda > 0$ e as funções $a \in L^\alpha(\Omega)$ e $b \in L^\beta(\Omega)$, com $\alpha > (\frac{2^*}{q+1})'$ e $\beta > (\frac{2^*}{p+1})'$ (conjugados de Hölder), assumem valores positivos em subdomínios de Ω de medida positiva, mas com a possibilidade mudarem de sinal no resto de Ω; e caso $q = 0$, $a(x) \geq 0$, p.q.t. $x \in \Omega$.

Três anos depois, em [16], os mesmo autores, obtêm resultados também para o caso crítico ($p = 2^* - 1$), com mais restrições nos sinais das funções peso. A classe de problemas estudada também inclui o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda c(x)(u+1)^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $p > 1$ e a função $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$ em Ω, introduzido por Brézis e Nirenberg em [8], com $c \equiv 1$ em Ω.

Nesta dissertação apresentamos as duas abordagens referidas: a de Brown e Wu [11], e a de Figueiredo, Gossez e Ubilla [15] e [16].

No capítulo 1, é abordado detalhadamente o artigo [16] com o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

onde $f_\lambda : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e é apresentado a a sua aplicação aos problemas atrás referidos. Na secção 1.2 é provada a existência de uma solução positiva pelo Método de sub e sobresoluções fracas e ainda um resultado de não existência. Na secção 1.3 é utilizado o Teorema da Passagem da Montanha para provar a existência de uma segunda solução positiva, quando o problema tem crescimento subcrítico, i.e.,

$$|f_\lambda(x, s)| \leq d_1 + d_2 |s|^{\sigma - 1},$$

quando $\sigma < 2^* - 1$ e $d_1, d_2 > 0$, para todo $s > 0$, p.q.t. $x \in \Omega$. Na secção 1.4, é estendido o resultado para problemas de crescimento crítico, i.e., $\sigma = 2^* - 1$.

No Capítulo 2 é estudado o artigo [11]. Na secção 2.2 é abordado a relação entre a *Variedade de Nehari* e as *Fibering Maps* e é realizado o estudo analítico das *Fibering Maps*. Por último, são apresentados os resultados de existência na secção 2.3.

No Apêndice A são apresentados algumas definições e resultados utilizados ao longo da dissertação, tais como, o Teorema da passagem da montanha, o Princípio máximo, as injeções de Sobolev, entre outras.

Capítulo 1

Existência de duas soluções positivas - método I

1.1 Introdução

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \tag{1.1$_\lambda$}$$

onde Ω é um subdomínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira Γ regular, $N \geq 3$, $\lambda > 0$ e $f_\lambda : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory. A classe de problemas que vamos considerar inclui problemas do tipo côncavo-convexo, i.e., problemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x) u^q + b(x) u^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $0 < q < 1 < p$, $\lambda > 0$ e as funções $a(x), b(x) \in C^1(\overline{\Omega})$. Como poderemos observar nas proposições seguintes, a existência de soluções positivas do problema (1.2) está relacionada com o sinal das funções a e b.

Proposição 1.1.1. *Consideremos $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\lambda > 0$. Se $a(x), b(x) \leq 0$, então o problema (1.2) não tem solução.*

Demonstração. Suponhamos que u é solução positiva do problema (1.2), então multiplicando a equação por u e integrando em Ω, obtemos

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \lambda a(x) u^{q+1} + b(x) u^{p+1} \, \mathrm{d}x \leq 0,$$

logo $u \equiv 0$. $\square$

No artigo de Brézis e Oswald [10], é provada a existência e a unicidade de solução para problemas tais que a função $s \mapsto f(x,s)/s$ é decrescente em $[0,\infty)$ (ver Teorema A.14).

Proposição 1.1.2. *Consideremos $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\lambda > 0$. Se $a(x) \geq 0$ e $b(x) \leq 0$, então o problema (1.2) admite uma única solução.*

Demonstração. Como $a(x) \geq 0$ e $b(x) \leq 0$ e $0 < q < 1 < p$, então a função

$$s \mapsto \frac{\lambda a(x)s^q + b(x)s^p}{s}$$

é decrescente em $\mathbb{R}^+$. Além disso,

$$\lambda a(x)s^q + b(x)s^p \leq \lambda \|a\|_\infty s^q,$$

para todo $s > 0$. Como $q < 1$, existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $s > 0$ e p.q.t. $x \in \Omega$, $\lambda a(x)s^q + b(x)s^p \leq C(s+1)$. Temos ainda,

$$\lim_{s\to 0} \frac{\lambda a(x)s^q + b(x)s^p}{s} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{s\to \infty} \frac{\lambda a(x)s^q + b(x)s^p}{s} = -\infty.$$

Logo, pelo Teorema A.14, o problema (1.2) admite uma única solução. □

Como iremos ver à frente (ver Corolários 1.3.17 e 1.4.10), se a função $a(x) \geq 0$, em Ω e a função b é positiva num conjunto de medida positiva, mas com possibilidade de mudar de sinal, então para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno o problema (1.2) tem, pelo menos, duas soluções se $1 < p \leq 2^*$. Caso $p \geq 2^*$ ainda é possível garantir a existência de, pelo menos, uma solução, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno (ver Corolário 1.2.6).

Vamos ainda considerar os problemas como o que se segue:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda c(x)(u+1)^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \tag{1.3}$$

com $p > 1$ e a função $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$ em Ω. Este problema foi introduzido por Brézis e Nirenberg em [8], com $c \equiv 1$ em Ω.

As secções seguintes são baseadas nos artigos [15] e [16].

1.2 Crescimento sobrelinear arbitrário

Primeira solução positiva

Nesta secção iremos provar, a existência de, pelo menos, uma solução para o problema $(1.1)_\lambda$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, pelo Método de sub e sobresoluções fracas (cf. Teorema 1.1). O método consiste em encontrar $\underline{u}, \overline{u} \in H_0^1(\Omega)$, respetivamente, subsolução e sobresolução fracas do problema $(1.1)_\lambda$ tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$. Desta forma existe uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema $(1.1)_\lambda$ tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ (cf. Teorema A.3). Iremos ainda provar um resultado de não existência de solução positiva para λ suficientemente grande (cf. Teorema 1.2).

Sabemos que, $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema $(1.1)_\lambda$ se, e só se, é um ponto crítico do funcional associado $J_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por,

$$J_\lambda(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F_\lambda(x,u)\,\mathrm{d}x,$$

onde F_λ é a primitiva de f_λ

$$F_\lambda(x,s) := \int_0^s f_\lambda(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Assim, u é solução fraca do problema $(1.1)_\lambda$ se, e só se, para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$J_\lambda'(u)\varphi := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_\lambda(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x = 0.$$

Seja $f_\lambda : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e consideremos as seguintes hipóteses.

(M) Se $\lambda < \overline{\lambda}$, então

$$f_\lambda(x,s) \leq f_{\overline{\lambda}}(x,s),$$

para todo $s \geq 0$, p.q.t. $x \in \Omega$.

(H_0) Para cada $\lambda, s_0 > 0$, existe uma constante $B > 0$ tal que

$$f_\lambda(x,s) \geq -Bs,$$

para todo $s \in [0, s_0]$ e p.q.t. $x \in \Omega$.

(H_1) Para cada $\lambda, s_0 > 0$, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$|f_\lambda(x,s)| \leq A,$$

para todo $s \in [0, s_0]$ e p.q.t. $x \in \Omega$.

(H_2) Existem $\lambda_0 > 0$ e uma função não decrescente $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ com

$$\inf\{h(s)/s : s > 0\} < 1/\|\xi\|_\infty,$$

tais que

$$f_{\lambda_0}(x,s) \leq h(s),$$

para todo $s \geq 0$ e p.q.t. $x \in \Omega$, onde ξ é a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta\xi = 1 & \text{em } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

(H_3) Para cada $\lambda > 0$, existem um subdomínio $\Omega_1 \subset \Omega$ não vazio e regular, $\theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$ e $s_1 > 0$ tais que

$$f_\lambda(x, s) \geq \theta_1 s,$$

para todo $s \in [0, s_1]$ e p.q.t. $x \in \Omega_1$, onde $\lambda_1(\Omega_1)$ é o primeiro valor próprio de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega_1)$.

Observação 1.2.1. *A monotonia das funções f_λ em relação ao parâmetro λ (hipótese (M)) garante a existência de uma solução do problema $(1.1)_\lambda$, para todo λ suficientemente pequeno. Caso a hipótese não seja assumida ainda é possível encontrar uma solução para o problema $(1.1)_{\lambda_0}$ com λ_0 dado pela hipótese (H_2).*

Observação 1.2.2. *A hipótese (H_0) implica que $f_\lambda(x, 0) \geq 0$. Pelo prolongamento de $f_\lambda(x, s)$ a $s < 0$, pondo $f_\lambda(x, s) = f_\lambda(x, 0)$, p.q.t. $x \in \Omega$, temos $f_\lambda(x, s) \geq 0$ para todo $s \leq 0$, p.q.t. $x \in \Omega$. Desta forma, consideremos sempre este prolongamento de f_λ a $\Omega \times \mathbb{R}$.*

Lema 1.2.3. *Se u é uma solução clássica não trivial do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{1.4}$$

e a hipótese (H_0) é satisfeita, então u é solução do problema $(1.1)_\lambda$.

Demonstração. Multiplicando a equação do problema (1.4) por $-u^-$ e integrando em Ω, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\Omega |\nabla u^-|^2 \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega -\Delta u(-u^-) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f_\lambda(x, u)(-u^-) \, \mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega f_\lambda(x, -u^-)u^- \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f_\lambda(x, 0)u^- \, \mathrm{d}x \leq 0 \end{aligned}$$

logo, $u^- \equiv 0$. Pela hipótese (H_0), existe uma constante $B > 0$ tal que

$$-\Delta u = f_\lambda(x, u) \geq -Bu,$$

p.q.t. $x \in \Omega$. Logo, pelo Princípio Máximo Forte A.6, $u > 0$ em Ω. □

Observação 1.2.4. *As hipóteses (H_2) e (H_3) garantem, respetivamente, a existência de uma sobresolução e de uma subsolução do problema $(1.1)_\lambda$. Juntamente com a hipótese (H_1), satisfazem as condições do Teorema A.3 (ver a Secção A.2).*

Observação 1.2.5. *A hipótese (H_3) é uma condição de sublinearidade 'local' na origem da função f_λ. Caso se verifique seguinte condição*

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{f(x, s)}{s} = +\infty, \text{ uniformemente para } x \in \Omega_1,$$

então a hipótese (H_3) também é satisfeita.

Teorema 1.1. *Se as hipóteses (M), (H_0), (H_1), (H_2) e (H_3), são satisfeitas, então existe uma constante $\Lambda \in (0, \infty]$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema $(1.1)_\lambda$ tem, pelo menos, uma solução, w, com $J_\lambda(w) < 0$.*

Demonstração do Teorema 1.1. **1)** Vamos provar a existência de uma solução fraca para o problema $(1.1)_{\lambda_0}$, onde λ_0 é dado pela hipótese (H_2), pelo método de sub e sobre-soluções fracas.

Sobresolução. Sejam $\lambda_0 > 0$ e a função h dados pela hipótese (H_2) e $\xi \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é a solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta\xi = 1 & \text{em } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Pela hipótese (H_2) temos $f_{\lambda_0}(x, s) \leq h(s)$ para todo $s \geq 0$ e

$$\inf\{h(s)/s : s > 0\} < 1/\|\xi\|_\infty,$$

donde existe um $M > 0$ tal que

$$h(M\|\xi\|_\infty)/(M\|\xi\|_\infty) \leq 1/\|\xi\|_\infty,$$

ou seja

$$h(M\|\xi\|_\infty) \leq M.$$

Como a funçao h é não decrescente temos

$$h(M\|\xi\|_\infty) \geq h(M\xi),$$

logo, pela hipótese (H_2)

$$-\Delta(M\xi) = M \geq h(M\xi) \geq f_{\lambda_0}(x, M\xi).$$

Portanto, $M\xi$ é sobresolução do problema $(1.1)_{\lambda_0}$.

Subsolução. Seja φ_1 a função própria de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega_1)$, associada ao valor próprio $\lambda_1(\Omega_1)$, onde Ω_1 é dado em (H_3). Sabemos que $\varphi_1 \in H^2(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1)$. Denotemos, ainda por φ_1 o prolongamento de φ_1 por 0 a $\Omega \backslash \Omega_1$. Seja $\varphi_\varepsilon = \varepsilon\varphi_1$ para $\varepsilon > 0$. Para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta\varphi_\varepsilon v \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \nabla\varphi_\varepsilon \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega_1} \nabla\varphi_\varepsilon \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \\ {}^{1}&= \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial\nu} v \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega_1} \Delta(\varphi_\varepsilon) v \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial\nu} v \, \mathrm{d}x + \lambda_1(\Omega_1) \int_{\Omega_1} \varphi_\varepsilon v \, \mathrm{d}x \\ &\leq \lambda_1(\Omega_1) \int_{\Omega_1} \varphi_\varepsilon v \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

[1]Identidade de Green, ver o Lema A.8.1.

porque $\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial\nu} \leq 0$ e $v \geq 0$. Pela hipótese (H_3) temos, para todo $\varepsilon \leq s_1/\|\varphi_1\|$,

$$\lambda_1(\Omega_1)\int_{\Omega_1}\varphi_\varepsilon v \,\mathrm{d}x \leq \int_{\Omega_1} f_{\lambda_0}(x,\varphi_\varepsilon)v \,\mathrm{d}x \leq \int_{\Omega} f_{\lambda_0}(x,\varphi_\varepsilon)v \,\mathrm{d}x,$$

observemos que $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ em $\Omega\backslash\Omega_1$. Portanto, para $\varepsilon \leq s_1/\|\varphi_1\|_\infty$,

$$-\int_\Omega \Delta\varphi_\varepsilon v \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f_{\lambda_0}(x,\varphi_\varepsilon)v \,\mathrm{d}x.$$

donde concluímos que φ_ε é subsolução fraca do problema $(1.1)_{\lambda_0}$.

Se tomarmos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $\varphi_\varepsilon \leq M\xi$ em Ω, pelo Teorema A.3, garantimos a existência de uma solução fraca w para o problema $(1.1)_{\lambda_0}$ tal que (cf. demonstração do Teorema A.3)

$$J_{\lambda_0}(w) = \min\{J_{\lambda_0}(u) : \varphi_\varepsilon \leq u \leq M\xi,\ u \in H_0^1(\Omega)\}.$$

2) Consideremos

$$\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : (1.1)_\lambda \text{ tem uma solução}\}.$$

Seja $\overline{\lambda} < \Lambda$ tal que o problema $(1.1)_{\overline{\lambda}}$ tem uma solução $\overline{u}$. Queremos ver que para cada $\lambda < \overline{\lambda}$ o problema $(1.1)_\lambda$ tem uma solução w tal que $J_\lambda(w) < 0$. Pela hipótese (M), $f_{\overline{\lambda}}(x,\overline{u}) \geq f_\lambda(x,\overline{u})$ donde

$$-\Delta\overline{u} \geq f_\lambda(x,\overline{u}),$$

logo $\overline{u}$ é uma sobresolução do problema $(1.1)_\lambda$. Pelo argumento acima existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que φ_ε é subsolução fraca do problema $(1.1)_\lambda$ e $\varphi_\varepsilon < \overline{u}$. Novamente pelo Teorema A.3, existe uma solução fraca, w, do problema $(1.1)_\lambda$ tal que

$$J_\lambda(w) = \min\{J_\lambda(u) : \varphi_\varepsilon \leq u \leq \overline{u},\ u \in H_0^1(\Omega)\}. \tag{1.5}$$

Para concluirmos a demonstração basta provar que $J_\lambda(w) < 0$. Seja ε tal que $\varepsilon \leq s_1/\|\varphi_1\|$, pela hipótese (H_3) temos

$$\begin{aligned} J(\varphi_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\|\varphi_\varepsilon\|^2 - \int_\Omega F_\lambda(x,\varphi_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\|\varphi_\varepsilon\|^2 - \frac{\theta_1}{2}\int_\Omega \varphi_\varepsilon^2 \,\mathrm{d}x \\ \text{[2]} &= (\lambda_1 - \theta)\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\Omega_1}\varphi_1^2 \,\mathrm{d}x \\ &< 0. \end{aligned}$$

donde concluímos que $J_\lambda(w) < 0$. $\square$

[2]Observemos que $\|\varphi_1\|^2 = \lambda_1(\Omega_1)\int_{\Omega_1}\varphi_1^2 \,\mathrm{d}x$

Corolário 1.2.6. *Consideremos o problema (1.2)*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & em\ \Omega, \\ u > 0 & em\ \Omega, \\ u = 0 & sobre\ \Gamma, \end{cases}$$

com $0 \leq q < 1 < p$ *e as funções* $a, b \in L^\infty(\Omega)$. *Suponhamos:*

(i) $a(x) \geq 0$, *p.q.t.* $x \in \Omega$,

(ii) existem uma bola $B_1 \subset \Omega$ *e* $\varepsilon_1 > 0$ *tais que* $a(x) \geq \varepsilon_1$ *p.q.t.* $x \in B_1$.

Então existe uma constante $\Lambda \in (0, \infty]$ *tal que para todo* $\lambda \in (0, \Lambda)$ *o problema (1.2) tem, pelo menos, uma solução* w *tal que* $J_\lambda(w) < 0$.

Demonstração. De forma a aplicar o Teorema 1.1 é suficiente verificar as hipóteses (M), (H_0), (H_1), (H_2), (H_3). Consideremos $s_0 > 0$, então pela hipótese (i), temos:

- se $\lambda < \overline{\lambda}$, então $\lambda a(x)s^q + b(x)s^p < \overline{\lambda} a(x)s^q + b(x)s^p$, para todo $s \geq 0$, p.q.t. $x \in \Omega$;
- $\lambda \dfrac{a(x)}{s^{1-q}} + b(x)s^{p-1} \geq -\|b\|_\infty s_0^{p-1}$, para $s \in [0, s_0]$, p.q.t. $x \in \Omega$;
- $\lambda a(x)s^q + b(x)s^p \leq \lambda \|a\|_\infty s_0^q + \|b\|_\infty s_0^p$, para $s \in [0, s_0]$, p.q.t. $x \in \Omega$;

o que implica as hipóteses (M), (H_0), (H_1). A hipótese (H_2) é verificada considerando a função $h(s) = \lambda \|a\|_\infty s^q + \|b\|_\infty s^p$, para todo λ suficientemente pequeno (ver o lema seguinte). Pela hipótese (ii), temos [3]

$$\lim_{s \to 0^+} \left(\lambda \frac{a(x)}{s^{1-q}} + b(x)s^{p-1} \right) \geq \lim_{s \to 0^+} \left(\lambda \frac{\varepsilon_1}{s^{1-q}} + b(x)s^{p-1} \right) = \infty,$$

p.q.t. $x \in B_1$, o que garante a hipótese (H_3). □

Lema 1.2.7. *Considerando* $h(s) = \lambda \|a\|_\infty s^q + \|b\|_\infty s^p$, *então para* λ *suficientemente pequeno* $\inf\{h(s)/s : s > 0\} < 1/\|\xi\|_\infty$.

Demonstração. Vamos ver que existe uma constante $M > 0$ tal que para λ suficientemente pequeno, $1/\|\xi\|_\infty > \dfrac{h(M\|\xi\|_\infty)}{M\|\xi\|_\infty}$, i.e.,

$$M > h(M\|\xi\|_\infty) = \lambda \|a\|_\infty (M\|\xi\|_\infty)^q + \|b\|_\infty (M\|\xi\|_\infty)^p.$$

Consideremos $A = \|a\|_\infty$, $B = \|b\|_\infty$, $C = \|\xi\|_\infty$ e a função

$$\overline{h}(s) = s - B(sC)^p.$$

Temos $\overline{h}'(s) = 1 - pBC(sC)^{p-1}$, donde observamos que $\overline{h}$ atinge um máximo positivo em

$$M := \frac{1}{C(BpC)^{1/(p-1)}}.$$

O resultado segue se $\lambda < \dfrac{\overline{h}(M)}{A(MC)^q} = \dfrac{M - B(MC)^p}{A(MC)^q}$. □

[3] Ver Observação 1.2.5.

Observação 1.2.8. *Observemos que* Λ*, dado pelo Teorema 1.1, pode ser igual a* ∞*. Por exemplo, se para cada* $\lambda > 0$ *existir uma constante* $M_\lambda > 0$ *tal que* $f_\lambda(x, M_\lambda) < 0$*, p.q.t.* $x \in \Omega$*, então a constante* M_λ *é uma sobresolução do problema* $(1.1)_\lambda$*. Tomando* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno a função* φ_ε *é uma subsolução do problema* $(1.1)_\lambda$ *tal que* $\varphi_\varepsilon \leq M_\lambda$ *em* Ω*.*

Além disso, pela definição de Λ*, caso* $\Lambda \neq \infty$ *e* $\lambda > \Lambda$*, o problema* $(1.1)_\lambda$ *não tem solução.*

Exemplo 1.2.9. *Se considerarmos o problema (1.2), com* $b \equiv -1$*, então para cada* $\lambda > 0$ *existe uma constante* $M_\lambda > (\lambda \|a\|_\infty)^{1/(p-q)}$ *tal que*

$$f_\lambda(x, M_\lambda) = \lambda a(x) M_\lambda^q - M_\lambda^p < 0, \ \text{p.q.t. } x \in \Omega,$$

logo $-\Delta M_\lambda = 0 > f_\lambda(x, M_\lambda)$*, p.q.t.* $x \in \Omega$*. Portanto o problema (1.2) tem uma solução para cada* $\lambda > 0$*.*

Observação 1.2.10. *Relativamente ao problema (1.2), pelo Lema 1.2.7 temos que* $\inf\{h(s)/s : s > 0\} < 1/\|\xi\|_\infty$*, para todo* λ *suficientemente pequeno, o que satisfaz a hipótese* (H_2) *para todo o* λ *suficientemente pequeno. Desta forma, conseguimos provar a existência de uma solução* $u \geq\not\equiv 0$*, para todo o* λ *suficientemente pequeno, sem pedir que* $a(x) \geq 0$ *em todo* Ω*, ou seja, a função* a *pode assumir valores negativos.*

No artigo [15] é provado um resultado um pouco mais geral que o Corolário 1.2.6, onde é considerado o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{1.6}$$

onde a função f satisfaz as seguintes hipóteses:

(H^0) $f(x,0) \geq 0$, p.q.t. $x \in \Omega$.

(H^1) Existem $0 \leq q < 1 < p$ e a, $b \in L^\infty(\Omega)$ tais que

$$f(x,s) \leq a(x)s^q + b(x)s^p,$$

para todo $s \geq 0$, p.q.t. $x \in \Omega$.

(H^2) Existem um subdomínio $\Omega_1 \subset \Omega$ não vazio e regular, $\theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$ e $s_1 > 0$ tais que

$$f(x,s) \geq \theta_1 s$$

para todo $s_1 \in [0, s_1]$, p.q.t. $x \in \Omega_1$, onde $\lambda_1(\Omega_1)$ é o primeiro valor próprio de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega_1)$.

Observação 1.2.11. *A hipótese* (H^2) *garante que* $a(x) \geq \varepsilon_1 > 0$*, em* Ω_1*.*

Proposição 1.2.12. *Se o problema (1.6) satisfaz as hipóteses* (H^0), (H^1) *e* (H^2), *então existe uma constante* $\delta = \delta(p, q, \Omega, b) > 0$ *tal que, se* $\|a\|_\infty \leq \delta$, *o problema (1.6) tem, pelo menos, uma solução* w, *tal que* $J(w) < 0$, *onde* J *é o funcional associado.*

Demonstração. A demonstração segue o mesmo método utilizado na primeira parte do Teorema 1.1, onde a contante δ pode ser encontrada pelo Lema 1.2.7 □

Consideremos o seguinte resultado de não existência de solução, relativo ao problema $(1.1)_\lambda$.

Teorema 1.2. *Se as hipóteses* (M), (H_0), (H_1), (H_2) *e* (H_3) *são satisfeitas e, além disso existem*

- *uma função* k *tal que* $\lim_{\lambda\to\infty} k(\lambda) = \infty$,
- *um subdomínio* $\tilde{\Omega}$ *não vazio e regular de* Ω *e uma função* $\tilde{m} \in L^\infty(\tilde{\Omega})$ *não nula, com* $\tilde{m} \geq 0$ *em* $\tilde{\Omega}$,

tais que

$$f_\lambda(x, s) \geq k(\lambda)\tilde{m}(x)s, \tag{1.7}$$

para todo $\lambda > 0$, $s \geq 0$ *e p.q.t.* $x \in \tilde{\Omega}$. *Então* $\Lambda < \infty$, *i.e., para* λ *suficientemente grande o problema* $(1.1)_\lambda$ *não tem solução.*

Demonstração. Seja $\lambda > 0$ tal que o problema $(1.1)_\lambda$ tem uma solução. Vamos provar que

$$k(\lambda) \leq \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega}),$$

onde $\lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega})$ é o primeiro valor próprio de $-\Delta$ em $H_0^1(\tilde{\Omega})$, com peso $\tilde{m}$. Seja φ_1 a função própria positiva associada a $\lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega})$ prolongada por 0 a $\Omega\backslash\tilde{\Omega}$. Seja u uma solução do problema $(1.1)_\lambda$, então $u > 0$ em $\tilde{\Omega}$. Assim, temos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u\,\varphi_1 \,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{\Omega}} f_\lambda(x, u)\varphi_1 \,\mathrm{d}x$$

e por (1.7) vem

$$\int_{\tilde{\Omega}} f_\lambda(x, u)\varphi_1 \,\mathrm{d}x \geq k(\lambda)\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x)u\varphi_1 \,\mathrm{d}x.$$

Analisemos dois casos. **1º caso:** $\tilde{\Omega} \neq \Omega$. Como $\varphi \in C^1(\tilde{\Omega} \cup \partial\tilde{\Omega}) \cap H^2(\tilde{\Omega})$, e $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \leq 0$ sobre $\partial\tilde{\Omega}$, pelo Lema A.8.1,

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\tilde{\Omega}} u\frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu} \,\mathrm{d}x - \int_{\tilde{\Omega}} u\Delta\varphi_1 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \lambda_1(\tilde{m}, \tilde{\Omega})\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x)u\varphi_1 \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Portanto,

$$k(\lambda)\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x)u\varphi_1 \,\mathrm{d}x \le \int_{\tilde{\Omega}} \nabla u\cdot\nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x \le \lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega})\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x)u\varphi_1 \,\mathrm{d}x.$$

Como $\tilde{m}(x)u\varphi_1 > 0$, vem

$$k(\lambda) \le \lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega}).$$

2º caso: $\tilde{\Omega} = \Omega$. Neste caso temos

$$\begin{aligned}
k(\lambda)\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x)u\varphi_1 \,\mathrm{d}x &\le \int_{\tilde{\Omega}} f_\lambda(x,u)\varphi_1 \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\tilde{\Omega}} \Delta u\varphi_1 \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\tilde{\Omega}} u\Delta\varphi_1 \,\mathrm{d}x \\
&= \lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega})\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{m}(x)u\varphi_1 \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ou seja

$$k(\lambda) \le \lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega}),$$

porque $\tilde{m}(x)u\varphi_1 > 0$.

Por hipótese $k(\lambda) \to \infty$, quando $\lambda \to \infty$, então existe λ suficientemente grande tal que

$$k(\lambda) > \lambda_1(\tilde{m},\tilde{\Omega}),$$

pelo que o problema respetivo $(1.1)_\lambda$ não tem solução. □

Corolário 1.2.13. *Consideremos o problema (1.2)*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & \textit{em } \Omega, \\ u > 0 & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $0 \le q < 1 < p$ *e as funções* $a, b \in L^\infty(\Omega)$. *Em adição às hipóteses (i) e (ii) do Corolário 1.2.6 suponhamos ainda que*

(iii) existe uma bola B_0 *tal que* $b(x) \ge 0$, *p.q.t.* $x \in B_0$ *e* $a(x)b(x) \not\equiv 0$ *para todo* $x \in B_0$.

Então $\Lambda < \infty$.

Para a demonstração do resultado anterior vamos ainda precisar do lema que se segue.

Lema 1.2.14. *Sejam* $A, B \ge 0$ *e* $0 \le q < 1 < p$. *Então existe uma constante* $C = C(p,q) > 0$ *tal que*

$$As^q + Bs^p \ge CA^{\frac{p-1}{p-q}}B^{\frac{1-q}{p-q}}s$$

para todo $s \ge 0$.

Demonstração. Sejam $Q = \frac{p-1}{p-q}$, $P = \frac{1-q}{p-q}$, $\alpha = qQ$, $\beta = pP > 0$. Assim,

$$\alpha + \beta = q\frac{p-1}{p-q} + p\frac{1-q}{p-q} = \frac{qp - q + p - pq}{p-q} = 1.$$

Então pela desigualdade de Young (Proposição A.8.2) temos

$$A^Q B^P s = A^Q s^\alpha B^P s^\beta \leq QAs^{\alpha/Q} + PBs^{\beta/P}.$$

Temos,

- $Q + P = \frac{p-1}{p-q} + \frac{1-q}{p-q} = 1$ (hipótese da desigualdade de Young);

- $q = \alpha/Q$, $p = \beta/P \implies \alpha = qQ = q\frac{p-1}{p-q}$, $\beta = pP = p\frac{1-q}{p-q}$;

Portanto, $A^Q B^P s \leq QAs^q + PBs^p \leq \max\{P, Q\}(As^q + Bs^p)$, e definindo $C^{-1} = \max\{P, Q\}$, obtemos o resultado. □

Demonstração do Corolário 1.2.13. Considerando o subdomínio $\tilde{\Omega} = B_0$ e a função $\tilde{m}(x) = a(x)^{\frac{p-1}{p-q}} b(x)^{\frac{1-q}{p-q}}$, então, pelo Lema 1.2.14, existe uma constante $C = C(p, q) > 0$ tal que

$$\lambda a(x)s^q + b(x)s^p \geq C\big(\lambda a(x)\big)^{\frac{p-1}{p-q}} b(x)^{\frac{1-q}{p-q}} s = C\lambda^{\frac{p-1}{p-q}} \tilde{m}(x)s,$$

para todo $\lambda > 0$, $s \geq 0$ e p.q.t. $x \in B_2$. Assim tomando $k(\lambda) = C\lambda^{\frac{p-1}{p-q}}$ o resultado segue pelo Teorema 1.2. □

Corolário 1.2.15. *Consideremos o problema (1.3)*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda c(x)(u+1)^p & \textit{em } \Omega, \\ u > 0 & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $p > 1$ e a função $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$ em Ω e $c(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ numa bola $B_0 \subset \Omega$. Então existe uma constante $\Lambda \in (0, \infty)$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema (1.3) tem, pelo menos, uma solução w tal que $J_\lambda(w) < 0$. Caso $\lambda > \Lambda$ o problema (1.3) não tem solução.

Demonstração. De forma a aplicar o Teorema 1.1 é suficiente verificar as hipóteses (M), (H_0), (H_1), (H_2), (H_3). Consideremos $s_0 > 0$, então

- se $\lambda < \overline{\lambda}$, então $\lambda c(x)(s+1)^p \leq \overline{\lambda} c(x)(s+1)^p$, para todo $s \geq 0$, p.q.t. $x \in \Omega$;

- $\lambda c(x)(s+1)^p \geq 0 \geq -Bs$, para $s \in [0, s_0]$, p.q.t. $x \in \Omega$;

- $\lambda c(x)(s+1)^p \leq \lambda\|c\|_\infty(s_0+1)^p$, para $s \in [0, s_0]$, p.q.t. $x \in \Omega$;

logo as hipóteses (M), (H_0), (H_1) são satisfeitas. Consideremos a função

$$h(s) = \lambda \|c\|_\infty (s+1)^p,$$

da mesma forma que o Lema 1.2.7, a função $\overline{h} = s - \lambda \|c\|_\infty (s\|\xi\|_\infty + 1)^p$ atinge um máximo positivo, se

$$\Big(\frac{1}{\lambda p \|c\|_\infty \|\xi\|_\infty}\Big)^{\frac{1}{p-1}} - 1 > 0$$

ou seja, se $\lambda < \dfrac{1}{p\|c\|_\infty \|\xi\|_\infty}$, a hipótese (H_2) é satisfeita. Pela Observação 1.2.5, a hipótese (H_3) é verificada na bola B_0

$$\lim_{s \to 0^+} \lambda \frac{c(x)(s+1)^p}{s} \geq \lim_{s \to 0^+} \lambda \frac{\varepsilon_0 (s+1)^p}{s} = \infty,$$

p.q.t. $x \in B_0$. Por fim, obviamente as hipóteses do Teorema 1.2 são verificadas, porque

$$\lambda c(x)(s+1)^p \geq \lambda c(x) s,$$

logo, $\Lambda < \infty$. □

1.3 Crescimento sobrelinear subcrítico

Segunda solução positiva

Nesta secção iremos provar resultados de existência de solução positiva para o problema $(1.1)_\lambda$

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\lambda(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

quando a função f_λ tem um crescimento sobrelinear subcrítico i.e., existem constantes $d_1, d_2 > 0$ e $\sigma \in [1, 2^*)$, tais que

$$|f_\lambda(x,s)| \leq d_1 + d_2 |s|^{\sigma - 1},$$

onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, com $N \geq 3$. No Teorema 1.3, será provado a existência de, pelo menos, uma solução positiva, quando $\lambda = \Lambda$. Pelo Teorema da Passagem da Montanha (ver Secção A.1) iremos provar a existência de uma segunda solução positiva para o problema $(1.1)_\lambda$, para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ (cf. Teorema 1.4).

Consideremos as seguintes hipóteses.

(H_4) Para cada $\lambda > 0$, existem $d_1, d_2 > 0$ e $\sigma \in [1, 2^*)$ tais que

$$|f_\lambda(x,s)| \leq d_1 + d_2 |s|^{\sigma - 1},$$

para todo $s \in [0, \infty)$ e p.q.t. $x \in \Omega$.

(H_5) Para cada $\lambda > 0$, existem $d, s_0 \geq 0$, $\theta > 2$ e $\rho \in [1, 2)$ tais que

$$\theta F_\lambda(x, s) \leq s f_\lambda(x, s) + d s^\rho$$

para todo $s \in [s_0, \infty)$ e p.q.t. $x \in \Omega$.

Observação 1.3.1. *A hipótese (H_4) é uma condição de crescimento sobre f_λ, garante que o funcional J_λ está bem definido e, além disso, também garante que uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema $(1.1)_\lambda$ pertence ao espaço $W^{2,r}(\Omega)$ para todo $r \in [1, \infty)$ e consequentemente $u \in C^1(\overline{\Omega})$ (ver Bootstrap, na secção A.7).*

Observação 1.3.2. *A hipótese (H_5) é motivada pela condição de superquadracidade de Ambrosetti-Rabinowitz [4]. Juntamente com a hipótese (H_4), garantem a condição de Palais-Smale, (ver Secção A.1).*

Teorema 1.3. *Para além das hipóteses (M), (H_0), (H_1), (H_2) e (H_3) suponhamos que, para um intervalo $[t_0, t_1] \subset (0, \Lambda)$ as hipóteses (H_4) e (H_5) são satisfeitas uniformemente para cada $\lambda \in [t_1, t_2]$ e para $\sigma \in [1, 2^*]$. Então o problema $(1.1)_\Lambda$ tem, pelo menos, uma solução, w, com $J_\Lambda(w) \leq 0$.*

Demonstração. Consideremos uma sucessão crescente $\{\lambda_j\}$ tal que $\lambda_j \to \Lambda$ e seja w_j uma solução do problema $(1.1)_{\lambda_j}$ com $J_j(w_j) < 0$ [4] (cf. Teorema 1.1). Então

$$\frac{1}{2}\|w_j\|^2 < \int_\Omega F_j(x, w_j)\, \mathrm{d}x.$$

Sejam $d, s_0 \geq 0$, $\theta > 2$, $\rho \in [1, 2)$ dados pela hipótese (H_5). Vamos ver que a sucessão $\{w_j\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Pela hipótese (H_5)

$$\theta \int_\Omega F_j(x, w_j)\, \mathrm{d}x \leq \int_{\{w_j \geq s_0\}} w_j f_j(x, w_j) + d w_j^\rho \, \mathrm{d}x + \int_{\{w_j < s_0\}} F_j(x, w_j)\, \mathrm{d}x$$

para cada λ_j. Além disso,

$$\int_\Omega w_j f_j(x, w_j)\, \mathrm{d}x = \|w_j\|^2 \quad \text{e} \quad \int_\Omega d w_j^\rho \, \mathrm{d}x = d\|w_j\|_\rho^\rho,$$

logo

$$\Big(\frac{\theta}{2} - 1\Big)\|w_j\|^2 < d\|w_j\|_\rho^\rho + C_1 \leq C\|w_j\|^\rho + C_1,$$

para $C, C_1 \in \mathbb{R}$. Como $(\frac{\theta}{2} - 1) > 0$ e $\rho < 2$ concluímos que a sucessão é limitada. Por *bootstrap*[5] temos $w_j \to w$ em $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Portanto, w é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f_\Lambda(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases}$$

[4]De modo a simplificar a notação escrevemos $J_{\lambda_j} = J_j$, $F_{\lambda_j} = F_j$ e $f_{\lambda_j} = f_j$

[5]A hipótese (H_4) é utilizada aqui, com $\sigma \in [1, 2^*]$ - ver Secção A.7.

e $J_\Lambda(w) \leq 0$. Suponhamos, com vista um absurdo, que $w \equiv 0$. Consideremos $s_1 > 0$ e Ω_1 dados pela hipótese (H_3) referente a λ_1, o primeiro elemento da sucessão $\{\lambda_j\}$. Seja $\lambda_1(\Omega_1)$ o valor próprio de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega_1)$ associado à primeira função própria positiva φ_1, prolongada por 0 a $\Omega\backslash\Omega_1$. Pela hipótese (M), temos, para todo $j > 1$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x = -\int_{\Omega_1} \Delta(w_j)\varphi_1 \,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega_1} f_j(x, w_j)\varphi_1 \,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_{\Omega_1} f_1(x, w_j)\varphi_1 \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

donde para j suficientemente grande tal que $0 \leq w_j(x) \leq s_1$, o que é possível porque $w_j \to 0$ uniformemente em $\overline{\Omega}$,

$$\int_{\Omega_1} f_1(x, w_j)\varphi_1 \,\mathrm{d}x \geq \theta_1 \int_{\Omega_1} w_j\varphi_1 \,\mathrm{d}x.$$

Por outro lado, pelo Lema A.8.1

$$\int_{\Omega_1} \nabla w_j \cdot \nabla\varphi_1 \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega_1} w_j \frac{\partial\varphi_1}{\partial\nu} \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega_1} w_j \Delta\varphi_1 \,\mathrm{d}x \leq \lambda_1(\Omega_1) \int_{\Omega_1} w_j\varphi_1 \,\mathrm{d}x.$$

Portanto

$$\lambda_1(\Omega_1) \int_{\Omega_1} w_j\varphi_1 \,\mathrm{d}x \geq \theta_1 \int_{\Omega_1} w_j\varphi_1 \,\mathrm{d}x$$

o que é absurdo porque $\theta_1 > \lambda_1(\Omega_1)$ e $w_j\varphi_1 > 0$ em Ω_1. $\square$

Corolário 1.3.3. *Consideremos o problema (1.2)*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & \textit{em } \Omega, \\ u > 0 & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $0 \leq q < 1 < p$ e as funções $a, b \in L^\infty(\Omega)$. Em adição as hipóteses (i), (ii) e (iii) do Corolário 1.2.13 suponhamos que $p \leq 2^* - 1$. Então para $\lambda = \Lambda$ o problema (1.2) tem, pelo menos, uma solução w, com $J_\Lambda(w) \leq 0$.

Demonstração. Consideremos o intervalo $[t_0, t_1] \subset (0, \Lambda)$, então a hipótese (H_5) é satisfeita tomando $\theta = p+1$, $\rho = q+1$, $d = t_1(\frac{\theta}{q+1} - 1)\|a\|_\infty$. A verificação da hipótese (H_4) é trivial, onde pelo Teorema 1.3 obtemos o resultado. $\square$

Corolário 1.3.4. *Consideremos o problema (1.3)*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda c(x)(u+1)^p & \textit{em } \Omega, \\ u > 0 & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $1 < p$ e a função $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$ em Ω e $c(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ numa bola $B_0 \subset \Omega$. Se $p \leq 2^* - 1$, então para $\lambda = \Lambda$ o problema (1.3) tem, pelo menos, uma solução w, com $J_\Lambda(w) \leq 0$.

Demonstração. Observemos que se $\theta \in (2, p+1)$, então

$$\begin{aligned}\theta F_\lambda(x,s) - sf_\lambda(x,s) &\leq \frac{\theta}{p+1}\lambda c(x)(s+1)^{p+1} - \lambda c(x)(s+1)^p(s+1-1)\\ &= \lambda c(x)(s+1)^p\left[\left(\frac{\theta}{p+1} - 1\right)(s+1) + 1\right]\\ &\leq 0\end{aligned}$$

para s suficientemente grande, desta forma, a hipótese (H_5) é verificada tomando $d = 0$. A verificação da hipótese (H_4) é trivial, logo, pelo Teorema 1.3, obtemos o resultado. □

Consideremos as seguintes hipóteses:

$(M)'$ Dados $\lambda, \overline{\lambda} > 0$ tais que $\lambda < \overline{\lambda}$,

$$f_\lambda(x,u) \leq\not\equiv f_{\lambda'}(x,u).$$

$(H_0)'$ Para cada $\lambda > 0$ e para cada $s_0 > 0$ existe $B \geq 0$ tal que a função

$$s \mapsto f_\lambda(x,s) + Bs$$

é não decrescente para $s \in [0, s_0]$ e p.q.t. $x \in \Omega$. Além disso, $f_\lambda(x,0) \geq 0$, p.q.t. $x \in \Omega$.

(H_6) Para cada $\lambda > 0$, existem um subdomínio $\Omega_2 \subset \Omega$ não vazio e regular e $\theta_2, s_2 > 0$ tais que

$$F_\lambda(x,s) \geq \theta_2 s^2,$$

para todo $s \in [s_2, \infty)$ e p.q.t. $x \in \Omega_2$.

Observação 1.3.5. *As hipóteses $(M)'$ e $(H_0)'$ são hipóteses mais fortes que as hipóteses (M) e (H_0), respetivamente.*

Lema 1.3.6. *Seja Ω_2 um subdomínio de Ω. Se f_λ satisfaz a seguinte a condição de sobrelinearidade 'local' no infinito em Ω_2,*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = +\infty, \text{ uniformemente para } x \in \Omega_2,$$

então a hipótese (H_6) é satisfeita.

Demonstração. Temos

$$\lim_{s\to\infty} \frac{F_\lambda(x,s)}{s^2} = \lim_{s\to\infty} \frac{f_\lambda(x,s)}{2s} = \infty,$$

logo existem $\theta_2, s_2 > 0$ tais que $F_\lambda(x,s) \geq \theta_2 s^2$ para todo $s \in [s_2, \infty)$, p.q.t. $x \in \Omega_2$. □

Teorema 1.4. *Consideremos a constante Λ dada pelo Teorema 1.1. Suponhamos que as hipóteses $(M)'$, $(H_0)'$, (H_1),$\cdots$, (H_6) são satisfeitas. Se $\lambda < \Lambda$, então o problema* $(1.1)_\lambda$ *tem, pelo menos, duas soluções, w e v, tais que $w < v$ em Ω, $\partial w/\partial\nu > \partial v/\partial\nu$ sobre Γ e $J_\lambda(w) < 0$.*

Fixemos $\lambda \in (0, \Lambda)$ e denotemos por w_0 a solução positiva do problema $(1.1)_\lambda$ dada pelo Teorema 1.1. Vamos procurar uma segunda solução para o mesmo problema da forma $v = w_0 + u$ com $u > 0$, i.e., queremos então encontrar uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g_\lambda(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u \not\equiv 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{1.8}$$

onde

$$g_\lambda(x,s) = f_\lambda(x, w_0 + s^+) - f_\lambda(x, w_0).$$

Lema 1.3.7. *Seja u solução do problema (1.8), então $v = w_0 + u$ é solução do problema inicial* $(1.1)_\lambda$.

Demonstração. Multiplicando $g_\lambda(x,u)$ por $-u^-$ e integrando em Ω obtemos

$$\int_\Omega g_\lambda(x,u)(-u^-)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Big(f_\lambda(x, w_0 + u^+) - f_\lambda(x, w_0)\Big)(-u^-)\,\mathrm{d}x = 0,$$

donde, pelo problema (1.8),

$$0 \leq \|u^-\|^2 = \int_\Omega g_\lambda(x,u)(-u^-)\,\mathrm{d}x = 0,$$

logo $u \geq 0$. Além disso, pelo Princípio Máximo forte, $u > 0$ em Ω e $\partial v/\partial\nu < 0$ sobre Γ. Consequentemente, $v = w_0 + u$ é solução do problema $(1.1)_\lambda$. $\square$

Com o objetivo de encontrarmos uma solução do problema (1.8) consideremos o funcional associado

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega G_\lambda(x,u)\,\mathrm{d}x,$$

onde

$$G_\lambda(x,s) := \int_0^s g_\lambda(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Vamos ver que as hipóteses do Teorema da Passagem da Montanha são satisfeitas para o funcional J_λ. Essencialmente, queremos ver que:

- $\mathcal{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale,
- existe $R > 0$ tal que para todo $\|u\| < R$, $\mathcal{J}_\lambda(0) < \mathcal{J}_\lambda(u)$,
- existe uma função $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u_1\| > R$ tal que

$$\mathcal{J}_\lambda(u_1) < \mathcal{J}_\lambda(0) = 0.$$

O lema seguinte será utilizado ao longo da secção.

Lema 1.3.8. *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então*

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u^-\|^2 + J_\lambda(w_0 + u^+) - J_\lambda(w_0).$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} G_\lambda(x,s) = \int_0^s g_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{s^+} f_\lambda(x, w_0 + t^+) - f_\lambda(x, w_0)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{w_0}^{w_0+s^+} f_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t - f_\lambda(x,w_0)s^+ \\ &= F_\lambda(x, w_0 + s^+) - F_\lambda(x, w_0) - f_\lambda(x, w_0)s^+, \end{aligned}$$

então

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\Big(\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2\Big) - \int_\Omega F_\lambda(x, w_0 + u^+) - F_\lambda(x, w_0) - f_\lambda(x, w_0)u^+\ \mathrm{d}x.$$

Por outro lado, como w_0 é solução do problema $(1.1)_\lambda$ temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(w_0 + u^+) &= \frac{1}{2}\Big(\|w_0\|^2 + \|u^+\|^2\Big) - \int_\Omega F_\lambda(x, w_0 + u^+) - \nabla w_0 \cdot \nabla u^+\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|w_0\|^2 + \|u^+\|^2\Big) - \int_\Omega F_\lambda(x, w_0 + u^+) - f_\lambda(x, w_0)u^+\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\lambda(u) - J_\lambda(w_0 + u^+) &= \frac{1}{2}\Big(\|u^-\|^2 - \|w_0\|^2\Big) + \int_\Omega F_\lambda(x, w_0)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - J_\lambda(w_0), \end{aligned}$$

ou seja

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u^-\|^2 + J_\lambda(w_0 + u^+) - J_\lambda(w_0).$$

□

Proposição 1.3.9. *Se as hipóteses (H_0), (H_4) e (H_5) são satisfeitas, então o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c em $H_0^1(\Omega)$, para todo o $c \in \mathbb{R}$.*[6]

Demonstração. Consideremos $c \in \mathbb{R}$ e as constantes $d, s_0 > 0$, $\theta > 2$ e $\rho \in [1,2)$ dadas pela hipótese (H_5). Consideremos a sucessão $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_n) \to c,\ J'_\lambda(u_n) \to 0.$$

[6] Ver Definição A.1.3.

Então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega F_\lambda(x, u_n)\ \mathrm{d}x \leq C$$

e

$$J'_\lambda(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \int_\Omega f_\lambda(x, u_n)u_n\ \mathrm{d}x \leq \varepsilon_n\|u_n\|,$$

com $\varepsilon_n \to 0$. Então,

$$\begin{aligned}\theta J_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u_n)u_n &= \Big(\frac{\theta}{2} - 1\Big)\|u_n\|^2 - \int_\Omega \theta F_\lambda(x, u_n) - f_\lambda(x, u_n)u_n\ \mathrm{d}x \\ &\leq \theta C + \varepsilon_n\|u_n\|.\end{aligned}$$

Queremos ver que a sucessão $\{u_n\}$ é limitada em $H^1_0(\Omega)$. Observemos que se $s < 0$, então

$$\theta F_\lambda(x, s) - f_\lambda(x, s)s = -\theta\int_s^0 f_\lambda(x, 0)\ \mathrm{d}t - f_\lambda(x, 0)s = (\theta - 1)f_\lambda(x, 0)s \leq 0.$$

Então, pela hipótese (H_5) temos

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\theta}{2} - 1\Big)\|u_n\|^2 &\leq \theta C + \varepsilon_n\|u_n\| + d\int_\Omega (u_n^+)^\rho\ \mathrm{d}x \\ &\leq \theta C + \varepsilon_n\|u_n\| + d\|u_n\|_\rho^\rho \\ &\leq \theta C + \varepsilon_n\|u_n\| + dS\|u_n\|^\rho,\end{aligned}$$

onde S é uma constante, da injeção contínua $H^1_0(\Omega) \subset L^\rho(\Omega)$. Assim,

$$0 \leq \theta C + \varepsilon_n\|u_n\| + dS\|u_n\|^\rho - \Big(\frac{\theta}{2} - 1\Big)\|u_n\|^2.$$

Como, por hipótese, $\rho < 2$ e $\dfrac{\theta}{2} - 1 > 0$ concluímos que a sucessão $\{u_n\}$ é limitada em $H^1_0(\Omega)$. Então existe uma subsucessão, ainda denotada por $\{u_n\}$, tal que

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u, & \text{em } H^1_0(\Omega), \\ u_n \to u, & \text{em } L^r(\Omega), \quad \forall\, r \in [1, 2^*), \\ u_n \to u, & \text{p.q.t. } x \in \Omega. \end{array}$$

Queremos ver que a subsucessão converge fortemente em $H^1_0(\Omega)$. Como $J'_\lambda(u_n) \to 0$, então

$$J'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \int_\Omega f_\lambda(x, u_n)u_n\ \mathrm{d}x \to 0 \tag{1.9}$$

e

$$J'_\lambda(u_n)u = \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u\ \mathrm{d}x - \int_\Omega f_\lambda(x, u_n)u\ \mathrm{d}x \to 0. \tag{1.10}$$

Consideremos as constantes $d_1, d_2 > 0$ e $\sigma \in [1, 2^*)$, dadas pela hipótese (H_4) e o conjugado de Hölder de σ, σ'. Então

$$\begin{aligned}
\|f_\lambda(x, u_n)\|_{\sigma'}^{\sigma'} &\leq \int_\Omega (d_1 + d_2|u_n|^{\sigma-1})^{\sigma'}\,\mathrm{d}x \\
&{}^{[7]}\leq 2^{\sigma'-1} \int_\Omega d_1^{\sigma'} + d_2^{\sigma'}|u_n|^{\sigma}\,\mathrm{d}x \\
&< C.
\end{aligned}$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder, temos

$$|\int_\Omega f_\lambda(x, u_n)u_n - f_\lambda(x, u_n)u\,\mathrm{d}x| \leq \|f_\lambda(x, u_n)\|_{\sigma'}\|u_n - u\|_\sigma \to 0, \tag{1.11}$$

porque $\|u_n - u\|_\sigma \to 0$ e $\|f_\lambda(x, u_n)\|_{\sigma'} < C$. Por fim, subtraindo (1.9) por (1.10) e usando (1.11) em concluímos que

$$\lim \|u_n\|^2 = \lim \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u\,\mathrm{d}x = \|u\|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim \|u_n - u\|^2 &= \lim \left(\|u_n\|^2 - 2\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u\,\mathrm{d}x + \|u\|^2 \right) \\
&= \|u\|^2 - 2\|u\|^2 + \|u\|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

i.e., $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. □

Corolário 1.3.10. *Se o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c + J_\lambda(w_0)$ em $H_0^1(\Omega)$, então o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $c \in \mathbb{R}$. Consideremos a sucessão $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{J}_\lambda(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_\lambda{}'(u_n) \to 0.$$

Multiplicando $g_\lambda(x, u_n)$ por $-u_n^-$ e integrando em Ω temos

$$\int_\Omega g_\lambda(x, u_n)(-u_n^-)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Big(f_\lambda(x, w_0 + u_n^+) - f_\lambda(x, w_0) \Big)(-u_n^-)\,\mathrm{d}x = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde

$$\mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)(-u_n^-) = \|u_n^-\|^2 - \int_\Omega g_\lambda(x, u_n)(-u_n^-)\,\mathrm{d}x = \|u_n^-\|^2.$$

[7] A prova a desigualdade para valores arbitrários pode ser vista na Proposição A.8.4.

Então por hipótese concluímos que

$$\lim \|u_n^-\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim \int_\Omega \nabla u_n^- \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = 0,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Consideremos a sucessão $\{w_0 + u_n^+\} \subset H_0^1(\Omega)$. De forma a aplicarmos a Proposição 1.3.9 vamos ver que

$$J_\lambda(w_0 + u_n) \to c + J_\lambda(w_0) \quad \text{e} \quad J_\lambda'(w_0 + u_n) \to 0.$$

Para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)\varphi &= \int_\Omega \nabla(u_n^+ - u_n^-) \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \Big(f_\lambda(x, w_0 + u_n^+) - f_\lambda(x, w_0)\Big)\varphi \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \nabla(w_0 + u_n^+ - u_n^-) \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f_\lambda(x, w_0 + u_n^+)\varphi \, \mathrm{d}x \\
&= J_\lambda'(w_0 + u_n^+)\varphi - \int_\Omega \nabla u_n^- \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

logo,

$$\lim \mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)\varphi = \lim J_\lambda'(w_0 + u_n^+)\varphi = 0,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Pelo Lema 1.3.8, temos para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{J}_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n^-\|^2 + J_\lambda(w_0 + u_n^+) - J_\lambda(w_0).$$

donde

$$\lim J_\lambda(w_0 + u_n^+) = \lim \mathcal{J}_\lambda(u_n) + J_\lambda(w_0) = c + J_\lambda(w_0).$$

Assim, como pela Proposição 1.3.9, o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c + J_\lambda(w_0)$, a sucessão $\{w_0 + u_n^+\}$ tem uma subsucessão convergente em $H_0^1(\Omega)$, donde concluímos que o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c. □

Proposição 1.3.11. *Suponhamos que as hipóteses (M), $(H_0)'$, (H_1), $\cdots$, (H_4) são satisfeitas para $\sigma \in [1, 2^*]$. Então a solução w_0 é um minimizante local para o funcional J_λ em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Consideremos, novamente, a subsolução $\varphi_\varepsilon = \varepsilon\varphi_1$ do problema $(1.1)_\lambda$ tal que $\varphi_\varepsilon \leq w_0$, onde φ_1 é a primeira função própria positiva de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega_1)$, prolongada por 0 a $\Omega \backslash \Omega_1$. Pela hipótese $(H_0)'$, existe uma constante $B \geq 0$ tal que

$$-\Delta(w_0 - \varphi_\varepsilon) \geq f_\lambda(x, w_0) - f_\lambda(x, \varphi_\varepsilon) \geq -B(w_0 - \varphi_\varepsilon).$$

Obviamente $w_0 \not\equiv \varphi_\varepsilon$ em Ω_1. Portanto, pelo Princípio Máximo Forte [8]

$$w_0 > \varphi_\varepsilon, \quad \text{em } \Omega_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w_0}{\partial \nu} < \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \nu}, \quad \text{sobre } \partial\Omega_1. \tag{1.12}$$

[8] Ver Secção A.3.

Como $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ em $\Omega\backslash\Omega_1$ então as desigualdades são satisfeitas em Ω.

Sejam $\overline{\lambda} \in (\lambda, \Lambda)$ e $\overline{u}$ a respetiva solução do problema $(1.1)_{\overline{\lambda}}$. Como $\lambda < \overline{\lambda}$, observemos que $\overline{u}$ é sobresolução do problema $(1.1)_\lambda$ e além disso, $w_0 \not\equiv \overline{u}$, caso contrário, $f_{\overline{\lambda}}(x, \overline{u}) \equiv f_\lambda(x, \overline{u})$. Novamente pela hipótese $(H_0)'$, existe uma constante $B \geq 0$, possivelmente diferente, tal que

$$-\Delta(\overline{u} - w_0) \geq f_\lambda(x, \overline{u}) - f_\lambda(x, w_0) \geq -B(\overline{u} - w_0).$$

Portanto, pelo Princípio Máximo Forte

$$\overline{u} > w_0, \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} < \frac{\partial w_0}{\partial \nu}, \quad \text{sobre } \Gamma. \tag{1.13}$$

Por (1.12) e (1.13) temos

$$\varphi_\varepsilon < w_0 < \overline{u}, \qquad \text{em } \Omega$$

e

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} > \frac{\partial w_0}{\partial \nu} > \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}, \qquad \text{sobre } \Gamma.$$

Desta forma $\{u \in H_0^1(\Omega) : \varphi_\varepsilon \leq w_0 \leq \overline{u}\}$ contém uma vizinhaça $C_0^1(\overline{\Omega})$ de w_0. Na demonstração do Teorema 1.1 em (1.5) vimos que

$$J_\lambda(w_0) = \min\{J_\lambda(u) : \varphi_\varepsilon \leq u \leq \overline{u},\ u \in H_0^1(\Omega)\},$$

donde concluímos que w_0 é um minimizante local de J_λ em $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Pelo Teorema A.10, w_0 é um minimizante local do funcional J_λ em $H_0^1(\Omega)$, a hipótese (H_4) para $\sigma \in [1, 2^*]$ é usada neste teorema. □

Corolário 1.3.12. *Se as hipóteses da proposição anterior são satisfeitas, então 0 é um minimizante local para o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.3.8 temos

$$\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u^-\|^2 + J_\lambda(w_0 + u^+) - J_\lambda(w_0).$$

Como w_0 é um minimizante local de J_λ em $H_0^1(\Omega)$, existe uma constante $R > 0$ tal que para todo $\|u\| \leq R$,

$$J_\lambda(w_0 + u^+) \geq J_\lambda(w_0),$$

donde

$$\mathcal{J}_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\|u^-\|^2 \geq \mathcal{J}_\lambda(0) = 0$$

i.e., 0 é um minimizante local de $\mathcal{J}_\lambda$ em $H_0^1(\Omega)$. □

Observação 1.3.13. *Se numa vizinhança de 0 não existe um ponto crítico, $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\mathcal{J}_\lambda(v) = 0$, então o Teorema A.15 garante a existência de uma constante $R > 0$ tal que*

$$\mathcal{J}_\lambda(0) < \inf\{\mathcal{J}_\lambda(u) : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\| = R\}.$$

Observemos que caso exista um ponto crítico, $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\mathcal{J}_\lambda(v) = 0$, então a demonstração do Teorema 1.4 é concluída.

Lema 1.3.14. *Suponhamos que as hipóteses* (H_5) *e* (H_6) *são satisfeitas, então existem* $s_3' > 0$, $C > 0$ *tais que*

$$F_\lambda(x,s) \geq Cs^\theta$$

para todo $s \geq s_3'$, *p.q.t.* $x \in \Omega_2$ *(*$\theta > 2$ *dado pela hipótese* (H_5)*).*

Demonstração. Sejam $\theta_2, s_2 > 0$ e Ω_2 dados pela hipótese (H_6) e $d, s_0 \geq 0$, $\theta > 2$ e $\rho \in [1,2)$ dados pela hipótese (H_5). Seja $s_3' \geq \max\{s_0, s_2\} + 1$. Então,

$$F_\lambda(x,s) \geq \theta_2 {s_3'}^2 > 0, \tag{1.14}$$

para $s \geq s_3'$ e p.q.t. $x \in \Omega_2$. Dividindo a desigualdade de (H_5), i.e.,

$$\theta F_\lambda(x,s) \leq s f_\lambda(x,s) + ds^\rho,$$

por $sF_\lambda(x,s)(\neq 0)$, integrando de s_3' a s e seguidamente tomando a exponencial temos,

$$\begin{aligned}
&\theta \int_{s_3'}^{s} 1/t \; \mathrm{d}t \leq \int_{s_3'}^{s} \frac{f_\lambda(x,t)}{F_\lambda(x,t)} \; \mathrm{d}t + d \int_{s_3'}^{s} \frac{t^{\rho-1}}{F_\lambda(x,t)} \; \mathrm{d}t \\
\iff &\exp\left[\theta \log\Big(\frac{s}{s_3'}\Big)\right] \leq \exp\left[\log\Big(\frac{F_\lambda(x,s)}{F_\lambda(x,s_3')}\Big)\right] \exp\left[d \int_{s_3'}^{s} \frac{t^{\rho-1}}{F_\lambda(x,t)} \; \mathrm{d}t\right] \\
\iff &F_\lambda(x,s_3')\Big(\frac{s}{s_3'}\Big)^\theta \exp\left[-d \int_{s_3'}^{s} \frac{t^{\rho-1}}{F_\lambda(x,t)} \; \mathrm{d}t\right] \leq F_\lambda(x,s).
\end{aligned}$$

Pela hipótese (H_6) e por (1.14) temos,

- $F_\lambda(x,s_3') \geq \theta_2 {s_3'}^2 > 0$, p.q.t. $x \in \Omega_2$,
- $0 \leq \displaystyle\int_{s_3'}^{s} \frac{t^{\rho-1}}{F_\lambda(x,t)} \; \mathrm{d}t \leq \int_{s_3'}^{s} \frac{t^{\rho-1}}{\theta_2 t^2} \; \mathrm{d}t = \frac{1}{\theta_2} \int_{s_3'}^{s} \frac{1}{t^{3-\rho}} \; \mathrm{d}t < C, \quad C \in \mathbb{R},$

donde,

$$0 < \exp\Big[-d \int_{s_3'}^{s} \frac{t^{\rho-1}}{F_\lambda(x,t)} \; \mathrm{d}t\Big] \leq 1.$$

Portanto, existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_\lambda(x,s) \geq Cs^\theta,$$

para todo $s \geq s_3'$ e p.q.t. $x \in \Omega_2$. □

Corolário 1.3.15. *Suponhamos que as hipóteses* (H_5) *e* (H_6) *são satisfeitas, então existem* $s_3 > 0$, $C > 0$ *tais que*

$$G_\lambda(x,s) \geq Cs^\theta$$

para todo $s \geq s_3$, *p.q.t.* $x \in \Omega_2$ *(*$\theta > 2$ *dado pela hipótese* (H_5)*).*

Demonstração. Pela hipótese (H_1) existe $A > 0$ tal que

$$|f_\lambda(x, s)| \leq A$$

para todo $s \in \big[0, \max\{w_0(x) : x \in \Omega_2\}\big]$ e p.q.t. $x \in \Omega_2$. Logo, existe $A' > 0$ tal que

$$F_\lambda(x, w_0) = \int_0^{w_0} f_\lambda(x, t)\, \mathrm{d}t \leq A \max\{w_0(x) : x \in \Omega_2\} \leq A'$$

para p.q.t. $x \in \Omega_2$. Pelo Lema 1.3.14, para todo $s \geq s_3'$ e p.q.t. $x \in \Omega_2$

$$\begin{aligned} G_\lambda(x, s) &= F_\lambda(x, w_0 + s) - F_\lambda(x, w_0) - f_\lambda(x, w_0)s \\ &\geq C(w_0 + s)^\theta - A' - As \\ &\geq Cs^\theta - A' - As. \end{aligned}$$

Portanto existem $s_3, C > 0$ tais que para todo $s \geq s_3$ e p.q.t. $x \in \Omega_2$

$$G_\lambda(x, s) \geq Cs^\theta,$$

com $\theta > 2$. $\square$

Proposição 1.3.16. *Suponhamos que as hipóteses (H_5) e (H_6) são satisfeitas, então existe uma função $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{t \to \infty} \mathcal{J}_\lambda(tu_1) = -\infty.$$

Demonstração. Consideremos $\theta_2 > 0$ e Ω_2 dados pela hipótese (H_6). Seja $u_1 \in C^\infty(\Omega)$ com suporte contido em Ω_2, $u_1 \geq 0$ e $u_1 \not\equiv 0$. Pelo Corolário 1.3.15 existe uma constante $C > 0$ tal que $G_\lambda(x, s) \geq Cs^\theta$ para todo $s \geq s_3$ e p.q.t. $x \in \Omega_2$.

Seja t_0 tal que para todo $t \geq t_0$ a medida de $\{x \in \Omega_2 : \ tu_1(x) \geq s_3\}$ seja positiva. Então, para todo $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\lambda(tu_1) &= \frac{t^2}{2}\|u_1\|^2 - \int_{\Omega_2} G_\lambda(x, tu_1)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2}\|u_1\|^2 - \int_{\{tu_1 < s_3\}} G_\lambda(x, tu_1)\, \mathrm{d}x - \int_{\{tu_1 > s_3\}} G_\lambda(x, tu_1)\, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|u_1\|^2 - C' - C\int_{\{tu_1 > s_3\}} (tu_1)^\theta\, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|u_1\|^2 - C' - C''t^\theta, \end{aligned}$$

com $C' \in \mathbb{R}$ e $C'' > 0$. Como $\theta > 2$, então $\mathcal{J}_\lambda(tu_1) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. $\square$

Demonstração do Teorema 1.4. Pelo Corolário 1.3.10 vimos que o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c em $H_0^1(\Omega)$, para todo $c \in \mathbb{R}$. Pela Observação 1.3.13 existe $R > 0$ tal que

$$\mathcal{J}_\lambda(0) < \inf\{\mathcal{J}_\lambda(u) : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\| = R\}.$$

Pela Proposição 1.3.16 existe uma função $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u_1\| > R$ tal que

$$\mathcal{J}_\lambda(u_1) < \mathcal{J}_\lambda(0) = 0.$$

Portanto podemos aplicar o Teorema da Passagem da Montanha, donde concluímos que o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ tem um ponto crítico $u > 0$. Pelo Lema 1.3.7 concluímos que $v = w_0 + u$ é uma segunda solução do problema $(1.1)_\lambda$. $\square$

Corolário 1.3.17. *Consideremos o problema (1.2)*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $0 \leq q < 1 < p$ *e as funções* $a, b \in L^\infty(\Omega)$. *Em adição as hipóteses (i) e (ii) do Corolário 1.2.6 suponhamos que* $p < 2^* - 1$ *e*

(iv) existem uma bola $B_2 \subset \Omega$ *e* $\varepsilon_2 > 0$ *tais que* $b(x) \geq \varepsilon_1$ *p.q.t.* $x \in B_2$.

Então, para $\lambda \in (0, \Lambda)$, *o problema (1.2) tem, pelo menos, duas soluções positivas,* w *e* v, *tais que* $w < v$ *em* Ω, $\partial w/\partial\nu > \partial v/\partial\nu$ *sobre* Γ *e* $J_\lambda(w) < 0$.

Corolário 1.3.18. *Consideremos o problema (1.3)*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda c(x)(u+1)^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $1 < p$ *e a função* $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$ *em* Ω *e* $c(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ *numa bola* $B_0 \subset \Omega$. *Se* $p < 2^* - 1$, *então, para* $\lambda \in (0, \Lambda)$, *o problema (1.3) tem, pelo menos, duas soluções positivas,* w *e* v, *tais que* $w < v$ *em* Ω, $\partial w/\partial\nu > \partial v/\partial\nu$ *sobre* Γ *e* $J_\lambda(w) < 0$.

Demonstração dos Corolários 1.3.17 e 1.3.18. Para os respetivos problemas temos

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\lambda a(x)}{s^{1-q}} + b(x)s^{p-q} = \infty, \quad \text{se } x \in B_2,$$

e

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\lambda c(x)(s+1)^p}{s} = \infty, \quad \text{se } x \in B_0,$$

logo a hipótese (H_6) é verificada pelo Lema 1.3.6. A verificação das hipóteses $(M)'$ e $(H_0)'$ é trivial, logo os resultados respetivos seguem pelo Teorema 1.4. $\square$

1.4 Crescimento sobrelinear crítico

Segunda solução positiva

Vimos na secção anterior que o problema $(1.1)_\lambda$ tem, pelo menos, duas soluções positivas quando a função f_λ tem um crescimento subcrítico. A impossibilidade de usar a demonstração do Teorema 1.4 para provar o resultado quando a função f_λ tem um crescimento sobrelinear crítico, vem do facto da injeção de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ não ser compacta, donde a prova da condição de Palais-Smale não é válida. Nesta secção olhamos para o problema $(1.1)_\lambda$ quando a função f_λ pode ser escrita como

$$f_\lambda(x,s) := a_\lambda(x,s) + b(x)s^{2^*-1}$$

onde para cada $\lambda > 0$,

- a função $a_\lambda(x,s)$ é não decrescente com respeito a s, p.q.t. $x \in \Omega$,
- a função $b(x) \in L^\infty(\Omega)$ e é não nula.

Consideremos ainda a seguinte hipótese

(H_{2^*}) Existem $x_1 \in \Omega$, uma bola $B_1 \subset \Omega$ tal que $x_1 \in B_1$ e constantes M e γ com

- $\gamma > 3/5$, para $N = 3$,
- $\gamma \geq 2^*$, para $N = 4$,
- $\gamma > 2^*$, para $N \geq 5$,

tais que
$$0 \leq \|b\|_\infty - b(x) \leq M|x - x_1|^\gamma,$$
p.q.t. $x \in B_1$.

Observação 1.4.1. *A hipótese (H_{2^*}) implica que, $b(x) \approx \|b\|_\infty$, numa vizinhaça de x_1, e caso a desigualdade seja verificada em x_1, então $b(x_1) = \|b\|_\infty$.*

Teorema 1.5. *Consideremos Λ dado pelo Teorema 1.1. Suponhamos que as hipóteses $(M)'$, $(H_0)'$, (H_1), (H_2), (H_3) são satisfeitas. Suponhamos ainda que a função a_λ satisfaz a hipótese (H_4) com $\sigma \in [1,2)$ e a função b satisfaz a hipótese (H_{2^*}). Então, se $\lambda \in (0,\Lambda)$ o problema $(1.1)_\lambda$ tem, pelo menos, duas soluções positivas, w e v, tais que $w < v$ em Ω, $\partial w/\partial\nu > \partial v/\partial\nu$ sobre Γ e $J_\lambda(w) < 0$.*

Fixemos $\lambda \in (0,\Lambda)$ e consideremos w_0 a solução positiva do problema $(1.1)_\lambda$ dada pelo Teorema 1.1. Vimos na secção anterior que w_0 é um minimizante local do funcional J_λ em $H_0^1(\Omega)$ (cf. Proposição 1.3.11). Vamos procurar uma segunda solução da forma $v = w_0 + u$ com $u > 0$, i.e., queremos encontrar uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g_\lambda(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u \not\equiv 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{1.15}$$

onde

$$
\begin{aligned}
g_\lambda(x,s) &= f_\lambda(x, w_0 + s^+) - f_\lambda(x,s)\\
&= a_\lambda(x, w_0+s^+) - a_\lambda(x,w_0) + b(x)\big[(w_0+s^+)^{2^*-1} - w_0^{2^*-1}\big].
\end{aligned}
$$

Sabemos, pelo Lema 1.3.7, que uma solução do problema (1.15) satisfaz os requisitos do Teorema 1.5. Desta forma, queremos encontrar um ponto crítico não nulo do funcional

$$
\mathcal{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega G_\lambda(x,u)\,\mathrm{d}x,
$$

em $H_0^1(\Omega)$, onde G_λ é a primitiva de g_λ:

$$
\begin{aligned}
G_\lambda(x,s) = {}& A_\lambda(x, w_0+s^+) - A_\lambda(x,w_0) - a_\lambda(x,w_0)s^+\\
&+ b(x)\Big[\frac{(w_0+s^+)^{2^*} - w_0^{2^*}}{2^*} - w_0^{2^*-1}s^+\Big],
\end{aligned}
$$

e

$$
A_\lambda(x,s) = \int_0^s a_\lambda(x,t)\,\mathrm{d}t.
$$

A demonstração do Teorema (1.5) será feita por redução ao absurdo, supondo que zero é o único ponto crítico do funcional $\mathcal{J}_\lambda$. Com o objetivo de aplicar o Teorema da Passagem da Montanha iremos ver que o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c com

$$
c < c^* := \frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}},
$$

onde S_0 é a melhor constante de Sobolev para a injeção $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$, i.e.,

$$
S_0 := \inf\{\|u\|^2 : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{2^*} = 1\}.
$$

Por último provamos a existência de uma de função $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$
\lim_{t\to\infty} \mathcal{J}_\lambda(tu_1) = -\infty
$$

e definindo

$$
H = \{\varphi \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \varphi(0) = 0, \varphi(1) = u_1\},
$$

vamos ver que

$$
\inf_{\varphi\in H} \max_{t\in[0,1]} \mathcal{J}_\lambda(\varphi(t)) < c^*.
$$

Lema 1.4.2. *Suponhamos que a função a_λ satisfaz a hipótese (H_4) para $\sigma \in [1,2)$ Suponhamos que 0 é o único ponto crítico do funcional $\mathcal{J}_\lambda$. Seja*

$$
c < c^* = \frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}},
$$

então o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Consideremos a sucessão $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{J}_\lambda(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_\lambda{}'(u_n) \to 0.$$

Então, existe uma constante $D > c$ tal que para n suficientemente grande

$$\mathcal{J}_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega G_\lambda(x, u_n)\,\mathrm{d}x \le D, \tag{1.16}$$

e

$$\mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)\varphi = \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega g_\lambda(x, u_n)\varphi\,\mathrm{d}x \le \varepsilon_n\|\varphi\|, \tag{1.17}$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ e $\varepsilon_n \to 0$.

Com objetivo de provar que a sucessão $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, analisemos a diferença entre $\mathcal{J}_\lambda(u_n)$ e $\dfrac{1}{2^*}\mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)(w_0 + u_n)$. Observemos, pela definição de g_λ e G_λ, que tomando apenas a parte negativa de u_n os integrais

$$\int_{\{u_n<0\}} G_\lambda(x, u_n)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\{u_n<0\}} g_\lambda(x, u_n)(w_0 + u_n)\,\mathrm{d}x$$

são nulos. Observemos ainda, que os termos de expoente crítico da diferença entre $\mathcal{J}_\lambda(u_n)$ e $\dfrac{1}{2^*}\mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)(w_0 + u_n)$ são cortados

$$\begin{aligned}
&b(x)\left[\frac{(w_0 + u_n^+)^{2^*} - w_0^{2^*}}{2^*} - w_0^{2^*-1}u_n^+ - \frac{(w_0 + u_n^+)^{2^*} - w_0^{2^*-1}(w_0 + u_n^+)}{2^*}\right]\\
=&b(x)\left[- w_0^{2^*-1}u_n^+ + \frac{w_0^{2^*-1}u_n^+}{2^*}\right]\\
=&-\frac{N+2}{2N}b(x)w_0^{2^*-1}u_n^+.
\end{aligned}$$

Portanto, a diferença entre $\mathcal{J}_\lambda(u_n)$ e $\dfrac{1}{2^*}\mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)(w_0 + u_n)$ é igual a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\|u_n\|^2 &- \int_\Omega A_\lambda(x, w_0 + u_n^+) - A_\lambda(x, w_0) - a_\lambda(x, w_0)u_n^+\,\mathrm{d}x\\
&+ \frac{1}{2^*}\int_\Omega \Big(a_\lambda(x, w_0 + u_n^+) - a_\lambda(x, w_0)\Big)(w_0 + u_n^+)\,\mathrm{d}x\\
&+ \frac{N+2}{2N}\int_\Omega b(x)w_0^{2^*-1}u_n^+\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Consideremos as constantes $d_1, d_2 > 0$ e $\sigma \in [1, 2)$ dadas pela hipótese (H_4) sobre a função a_λ. Como a_λ é uma função não decrescente com respeito a s, p.q.t. $x \in \Omega$, temos

$$a_\lambda(x, w_0 + u_n^+) - a_\lambda(x, w_0) \ge 0.$$

Por outro lado, pela hipótese (H_4), temos

$$-a_\lambda(x, w_0)u_n^+ \leq (d_1 + d_2 w_0^{\sigma-1})u_n^+ \leq C u_n^+, \quad C > 0$$

e

$$\begin{aligned} A_\lambda(x, w_0 + u_n^+) - A_\lambda(x, w_0) &\leq \int_{w_0}^{w_0+u_n^+} d_1 + d_2|t|^{\sigma-1}\,\mathrm{d}t \\ &= d_1 u_n^+ + \frac{d_2}{\sigma}\Big[(w_0 + u_n^+)^\sigma - (w_0)^\sigma\Big] \\ &\leq d_1 u_n^+ + \frac{d_2}{\sigma}(w_0 + u_n^+)^\sigma. \end{aligned}$$

Além disso,

$$-\frac{N+2}{2N}\int_\Omega b(x) w_0^{2^*-1} u_n^+\,\mathrm{d}x \leq \frac{N+2}{2N}\|b\|_\infty \int_\Omega w_0^{2^*-1} u_n^+\,\mathrm{d}x \leq C\int_\Omega u_n^+\,\mathrm{d}x,$$

para $C > 0$. Logo, pelas desigualdades (1.16) e (1.17) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\|u_n\|^2 &\leq \int_\Omega C u_n^+ + \frac{d_2}{\sigma}(w_0 + u_n^+)^\sigma\,\mathrm{d}x + D + \frac{\varepsilon_n}{2^*}\|w_0 + u_n\| \\ &\leq C\|u_n\|_1 + \frac{d_2}{\sigma}\|w_0 + u_n\|_\sigma^\sigma + D + \frac{\varepsilon_n}{2^*}\|w_0 + u_n\| \\ &\leq CS\|u_n\| + \frac{d_2}{\sigma}S'\|u_n\|^\sigma + D + \frac{\varepsilon_n}{2^*}\|w_0 + u_n\|, \end{aligned}$$

onde S e S' são constantes de Sobolev das injeções contínuas $H_0^1(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \subset L^\sigma(\Omega)$, respetivamente. Donde concluímos que a sucessão $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então, existe uma subsucessão, ainda denotada por $\{u_n\}$, tal que

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup u^*, && \text{em } H_0^1(\Omega), \\ &u_n \rightharpoonup u^*, && \text{em } L^{2^*}(\Omega), \\ &u_n \to u^*, && \text{em } L^r(\Omega), \quad \forall\, r \in [1, 2^*), \\ &u_n \to u^*, && \text{p.q.t. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Por (1.17), concluímos que u^* é solução fraca do problema (1.15), i.e, u^* é um ponto crítico do funcional $\mathcal{J}_\lambda$, donde por hipótese $u^* = 0$. Portanto, $\lim \|u_n\|_r^r = 0$, para todo $r \in [1, 2^*)$, logo

$$\lim\Big[\mathcal{J}_\lambda(u_n) - \frac{1}{2^*}\mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)(w_0 + u_n)\Big] = \lim \frac{1}{N}\|u_n\|^2,$$

então,

$$\lim \|u_n\|^2 = cN. \tag{1.18}$$

Se $c = 0$, então $u_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Suponhamos que $c \neq 0$. Como $w_0 + u_n \to w_0$, p.q.t. $x \in \Omega$ e $\|w_0 + u_n\|_{2^*-1} < C$, pelo Lema de Brézis-Lieb A.8.5, temos

$$\lim \|w_0 + u_n^+ - w_0\|_{2^*-1}^{2^*-1} = \lim \|w_0 + u_n^+\|_{2^*-1}^{2^*-1} - \|w_0\|_{2^*-1}^{2^*-1},$$

logo

$$\lim \int_\Omega b(x)\Big[(w_0+u_n^+)^{2^*-1} - w_0^{2^*-1}\Big]u_n \,\mathrm{d}x = \lim \int_\Omega b(x)(u_n^+)^{2^*} \,\mathrm{d}x,$$

donde

$$\lim \|u_n\|^2 = \lim \int_\Omega g_\lambda(x,u_n)u_n \,\mathrm{d}x = \lim \int_\Omega b(x){u_n^+}^{2^*} \,\mathrm{d}x \tag{1.19}$$

Pela desigualdade de Sobolev, $\|u_n\|_{2^*} \leq S_0^{-1/2}\|u_n\|$, temos

$$\|u_n\|^2 \geq S_0\Big(\int_\Omega |u_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x\Big)^{2/2^*} \geq \frac{S_0}{\|b\|_\infty^{2/2^*}}\Big(\int_\Omega b(x)(u_n^+)^{2^*} \,\mathrm{d}x\Big)^{2/2^*}.$$

Por (1.18) e (1.19), temos

$$cN \geq \frac{S_0}{\|b\|_\infty^{2/2^*}}(cN)^{2/2^*},$$

i.e.,

$$c \geq \frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}},$$

o que é absurdo por hipótese. $\square$

Sabemos que a constante S_0, definida anteriormente e apenas dependente de N, só é atingida quando $\Omega = \mathbb{R}^N$ pela função

$$\Phi(x) := d\Big(\frac{1}{1+|x|^2}\Big)^{(N-2)/2}$$

onde $d > 0$ é tal que $-\Delta\Phi = S_0\Phi^{(N+2)/(N-2)}$. Observemos que este problema é invariante por translação e dilatação, logo faz sentido definir, para $\varepsilon > 0$

$$\Phi_\varepsilon(x) := d\Big(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+|x-x_1|^2}\Big)^{(N-2)/2}$$

onde $x_1 \in B_1$ é dado pela hipótese (H_{2^*}) Além disso, temos

$$\|\Phi_\varepsilon\|^2 = \|\Phi_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = S_0^{N/2}.$$

De forma a encontrar uma função u_1, com as propriedades anteriormente referidas, consideremos, para cada $\varepsilon > 0$

$$\psi_\varepsilon(x) = \varphi(x)\Phi_\varepsilon(x),$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa tal que $\varphi \equiv 1$ perto de x_1 com suporte contido numa bola B_2 tal que $x_1 \in B_2$, $\overline{B}_2 \subset B_1$ e $b(x) \geq \mu > 0$, p.q.t. $x \in B_2$.

Lema 1.4.3. *Se $N \geq 4$, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$G(x,s) \geq b(x)\left[\frac{1}{2^*}s^{+2^*} + \frac{1}{2}\alpha w_0^{2^*-2}s^{+2}\right],$$

para todo $s > 0$, p.q.t. $x \in \Omega$. Caso $N = 3$, então

$$G(x,s) \geq b(x)\left[\frac{1}{6}s^{+6} + w_0 s^{+5}\right],$$

para todo $s > 0$, p.q.t. $x \in \Omega$.

Demonstração. Como a função $a_\lambda(x,s)$ é não decrescente com respeito a s, p.q.t. $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} g_\lambda(x,s) &= a_\lambda(x, w_0 + s^+) - a_\lambda(x, w_0) + b(x)\left[(w_0 + s^+)^{2^*-1} - w_0^{2^*-1}\right] \\ &\geq b(x)\left[(w_0 + s^+)^{2^*-1} - w_0^{2^*-1}\right] \\ &\geq b(x)\left[(s^+)^{2^*-1} + \alpha w_0^{2^*-2}s^+\right], \end{aligned}$$

onde a última desigualdade, com $\alpha > 0$, vem de

$$(a+b)^{2^*-1} \geq a^{2^*-1} + b^{2^*-1} + \alpha a^{2^*-2}b.$$

Para tal, basta ver que $(1+t)^{2^*-1} \geq 1 + t^{2^*-1} + \alpha t$ para todo $t \in (0,1)$, que segue pelo facto

$$\lim_{t \to 0+} \frac{(1+t)^{2^*-1} - 1 - t^{2^*-1}}{t} = 2^* - 1 > 0.$$

Desta forma,

$$G(x,s) \geq b(x)\left[\frac{1}{2^*}(s^+)^{2^*} + \frac{1}{2}\alpha w_0^{2^*-2}(s^+)^2\right].$$

Caso $N = 3$, observemos que $2^* - 1 = \dfrac{N+2}{N-2} = 5$, então

$$G(x,s) \geq b(x)\left[\frac{1}{6}(s^+)^6 + w_0(s^+)^5\right].$$

□

Lema 1.4.4. *$\mathcal{J}_\lambda(t\psi_\varepsilon) \to -\infty$ quando $t \to \infty$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.4.3 temos

$$G(x,t\psi_\varepsilon) \geq b(x)\left[\frac{1}{2^*}(t\psi_\varepsilon)^{2^*} + \frac{1}{2}\alpha w_0^{2^*-2}(t\psi_\varepsilon)^2\right] > 0,$$

para $x \in B_2$. Portanto, como $2 < 2^*$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathcal{J}_\lambda(t\psi_\varepsilon) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\|\psi_\varepsilon\|^2 t^2 - \int_\Omega G_\lambda(x, t\psi_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\ &\le \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\|\psi_\varepsilon\|^2 t^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b(x){\psi_\varepsilon}^{2^*}\,\mathrm{d}x - \frac{t^2}{2}\int_\Omega \alpha b(x) w_0^{2^*-2}\psi_\varepsilon^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

□

Portanto, o Lema 1.4.4 garante a existência de t_ε suficientemente grande tal que $\mathcal{J}_\lambda(t_\varepsilon\psi_\varepsilon) < 0$ e $\|t_\varepsilon\psi_\varepsilon\| > R$. Desta forma consideremos

$$H = \{h \in C([0,1], E) : h(0) = 0, h(1) = t_\varepsilon\psi_\varepsilon\}$$

e

$$c_\lambda = \inf_{h\in H} \max_{t\in[0,1]} \mathcal{J}_\lambda(h(t)).$$

Proposição 1.4.5. *Nas condições anteriores temos*

$$c_\lambda < c^* = \frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}}.$$

Consideremos as seguintes estimativas obtidas no artigo [8] de Brézis e Nirenberg.

Lema 1.4.6. *Quando $\varepsilon \to 0$, temos*

$$\|\psi_\varepsilon\|^2 = S_0^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}); \tag{1.20}$$

$$\|\psi_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = S_0^{N/2} + O(\varepsilon^{N}); \tag{1.21}$$

$$\|\psi_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} C_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}) & se\ N \ge 5; \\ C_2\varepsilon^2|\log\varepsilon^2| + O(\varepsilon^2) & se\ N = 4; \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\|\psi_\varepsilon\|_5^5 = C_3\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon^{5/2}) \qquad se\ N = 3. \tag{1.23}$$

com $C_1, C_2, C_3 > 0$.

Observação 1.4.7. *Pela construção de ψ_ε, temos*

$$\nabla\psi_\varepsilon(x) = \nabla\varphi(x)\Phi_\varepsilon(x) - (N-2)\varphi(x)\frac{d\varepsilon^{(N-2)/2}(x - x_1)}{(\varepsilon^2 + |x - x_1|^2)^{N/2}}.$$

Demonstração de (1.20).

$$\begin{aligned}\|\psi_\varepsilon\|^2 &= (N-2)d^2\varepsilon^{N-2}\int_\Omega \frac{|x-x_1|^2}{(\varepsilon^2 + |x-x_1|^2)^N}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^{N-2}) \\ &= (N-2)d^2\varepsilon^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x-x_1|^2}{(\varepsilon^2 + |x-x_1|^2)^N}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^{N-2}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^{N-2}) \\ &= S_0^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2})\end{aligned}$$

$\square$

Demonstração de (1.21).

$$
\begin{aligned}
\|\psi_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} =& \varepsilon^N d^{2^*} \int_\Omega \frac{\varphi^{2^*}(x)}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^N}\,\mathrm{d}x \\
=& \varepsilon^N d^{2^*} \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^N}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^N) \\
=& \varepsilon^N d^{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^N}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^N) \\
=& \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^N) \\
=& S_0^{N/2} + O(\varepsilon^N).
\end{aligned}
$$

$\square$

Demonstração de (1.22). Se $N \geq 5$,

$$
\begin{aligned}
\|\psi_\varepsilon\|_2^2 =& \varepsilon^{N-2} d^2 \int_\Omega \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^{N-2}}\,\mathrm{d}x \\
=& \varepsilon^{N-2} d^2 \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^{N-2}}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^{N-2}) \\
=& \varepsilon^{N-2} d^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^{N-2}}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^{N-2})
\end{aligned}
$$

com $x - x_1 = \varepsilon y$

$$
\begin{aligned}
=& \varepsilon^2 d^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|y|^2)^{N-2}}\,\mathrm{d}y + O(\varepsilon^{N-2}) \\
=& C_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}).
\end{aligned}
$$

Se $N = 4$,

$$
\begin{aligned}
\|\psi_\varepsilon\|^2 =& \varepsilon^2 d^2 \int_\Omega \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
=& \varepsilon^2 d^2 \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^2}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^2) \\
=& \varepsilon^2 d^2 \int_{\|x\|<R} \frac{1}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^2}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

com $x - x_1 = t$

$$
\begin{aligned}
=& \varepsilon^2 d^2 \frac{4}{3}\pi \int_0^R \frac{t^3}{(\varepsilon^2+|t|^2)^2}\,\mathrm{d}t + O(\varepsilon^2) \\
=& \varepsilon^2 d^2 \frac{2}{3}\pi \left(\Big(\log(\varepsilon^2+R^2) - \log\varepsilon^2 \Big) - \frac{R^2}{\varepsilon^2+R^2} \right) + O(\varepsilon^2) \\
=& C_2\varepsilon^2 |\log\varepsilon^2| + O(\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

□

Demonstração de (1.23). Se $N = 3$,

$$\begin{aligned}\|\psi_\varepsilon\|_5^5 =&\varepsilon^{5/2}d^5\int_\Omega \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x\\ =&\varepsilon^{5/2}d^5\int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^{5/2})\\ =&\varepsilon^{5/2}d^5\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\varepsilon^2+|x-x_1|^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^{5/2})\end{aligned}$$

com $x - x_1 = \varepsilon y$

$$\begin{aligned}=&\varepsilon^{1/2}d^5\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|y|^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}y + O(\varepsilon^{5/2})\\ =&C_3\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon^{5/2}).\end{aligned}$$

□

Lema 1.4.8. *Quando $\varepsilon \to 0$, temos*

$$\int_\Omega b(x)\psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x = \|b\|_\infty S_0^{N/2} + O(\varepsilon^{\gamma\delta}) + O(\varepsilon^{N(1-\delta)}).$$

Demonstração. Consideremos $x_1 \in B_1$ e a constante γ dados pela hipótese (H_{2^*}). Seja a bola B_δ, centrada em x_1 e raio ε^δ, com $\delta \in (0,1)$. Temos

$$\int_\Omega b(x)\psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (b(x)-\|b\|_\infty)\psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x + \|b\|_\infty\|\psi_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*}$$

Pela hipótese (H_{2^*}) e por (1.21)

$$\left|\int_{B_\delta} (b(x)-\|b\|_\infty)\psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x\right| \leq C\varepsilon^{\gamma\delta}\left[S_0^{N/2} + O(\varepsilon^N)\right] = O(\varepsilon^{\gamma\delta}),$$

com $C > 0$. Por outro lado,

$$\left|\int_{\Omega\setminus B_\gamma} (b(x)-\|b\|_\infty)\psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x\right| \leq C\int_{\Omega\setminus B_\gamma} \psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x = O(\varepsilon^{N(1-\delta)}),$$

onde a última igualdade pode ser verificada utilizando a expanção de Taylor em

$$\int_{\varepsilon^\delta}^\infty \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+t^2)^N}t^{N-1}\,\mathrm{d}t.$$

Então

$$\int_\Omega b(x)\psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x = \|b\|_\infty S_0^{N/2} + O(\varepsilon^{\gamma\delta}) + O(\varepsilon^{N(1-\delta)}).$$

□

Antes de demonstrarmos a Proposição 1.4.5 consideremos o seguinte lema.

Lema 1.4.9. *Sejam $A, B > 0$, então o máximo da função $t \mapsto \dfrac{A}{2}t^2 - \dfrac{B}{2^*}t^{2^*}$ é*

$$\frac{1}{N}\frac{A^{N/2}}{B^{(N-2)/2}}.$$

Demonstração. Derivando a função $\dfrac{A}{2}t^2 - \dfrac{B}{2^*}t^{2^*}$ em ordem a t temos

$$At - Bt^{2^*-1} = 0 \iff t = \left(\frac{A}{B}\right)^{(N-2)/4}.$$

Portanto o máximo da função é

$$\frac{A}{2}\left(\frac{A}{B}\right)^{(N-2)/2} - \frac{B}{2^*}\left(\frac{A}{B}\right)^{N/2} = \frac{1}{N}\frac{A^{N/2}}{B^{(N-2)/2}}.$$

$\square$

Demonstração da Proposição 1.4.5, com $\boldsymbol{N \geq 4}$. Queremos ver que

$$c_\lambda < c^* = \frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}}.$$

Observemos que $c_\lambda \leq \max\{\mathcal{J}_\lambda(t\psi_\varepsilon) : \ t \geq 0\}$. Pelo Lema 1.4.3 existe uma constante $\alpha > 0$ tal que para todo $s > 0$, p.q.t. $x \in \Omega$,

$$G(x,s) \geq b(x)\left[\frac{1}{2^*}s_0^{+2^*} + \frac{1}{2}\alpha w_0^{2^*-2}s_0^{+2}\right],$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\lambda(t\psi_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\|\psi_\varepsilon\|^2 t^2 - \int_\Omega G(x, t\psi_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2}\|\psi_\varepsilon\|^2 t^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b(x){\psi_\varepsilon}^{2^*}\,\mathrm{d}x - \frac{t^2}{2}\alpha\int_\Omega b(x)w_0^{2^*-2}{\psi_\varepsilon}^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2}\|\psi_\varepsilon\|^2 t^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b(x){\psi_\varepsilon}^{2^*}\,\mathrm{d}x - \frac{t^2}{2}\alpha'\|\psi_\varepsilon\|_2^2, \\
&\leq \frac{t^2}{2}\left(\|\psi_\varepsilon\|^2 - \alpha'\|\psi_\varepsilon\|_2^2\right)^+ - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b(x){\psi_\varepsilon}^{2^*}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

com $\alpha' > 0$. Pelo Lema 1.4.9 (observemos que $b(x) > 0$, para $x \in B_2$) a última expressão atinge o máximo em

$$\tau = \left(\frac{\left(\|\psi_\varepsilon\|^2 - \alpha'\|\psi_\varepsilon\|_2^2\right)^+}{\int_\Omega b(x)\psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x}\right)^{(N-2)/4}$$

com valor

$$\frac{1}{N}\frac{\Big[\big(\|\psi_\varepsilon\|^2-\alpha'\|\psi_\varepsilon\|_2^2\big)^+\Big]^{N/2}}{\Big[\int_\Omega b(x)\psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x\Big]^{(N-2)/2}}.$$

Portanto

$$\sup_{t>0}\mathcal{J}_\lambda(t\psi_\varepsilon)\le\frac{1}{N}\frac{\Big[\big(\|\psi_\varepsilon\|^2-\alpha'\|\psi_\varepsilon\|_2^2\big)^+\Big]^{N/2}}{\Big[\int_\Omega b(x)\psi_\varepsilon^{2^*}\,\mathrm{d}x\Big]^{(N-2)/2}}.$$

Se $N\ge 5$, então pelos Lemas 1.4.6 e 1.4.8 temos, para ε suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned}\sup_{t>0}\mathcal{J}_\lambda(t\psi_\varepsilon)&\le\frac{1}{N}\frac{\Big[S_0^{N/2}-\alpha' C_1\varepsilon^2+O(\varepsilon^{N-2})\Big]^{N/2}}{\Big[\|b\|_\infty S_0^{N/2}+O(\varepsilon^{\gamma\delta})+O(\varepsilon^{N(1-\delta)})\Big]^{(N-2)/2}}\\&=\frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}}\frac{\Big[1-C\varepsilon^2+O(\varepsilon^{N-2})\Big]^{N/2}}{\Big[1+O(\varepsilon^{\gamma\delta})+O(\varepsilon^{N(1-\delta)})\Big]^{(N-2)/2}},\end{aligned}$$

com $C>0$. Observemos que, para ε suficientemente pequeno,

$$-C\varepsilon^2+O\Big(\varepsilon^{N-2}\Big)=\varepsilon^2\Big(-C+\frac{O(\varepsilon^{N-2})}{\varepsilon^{N-2}}\varepsilon^{N-4}\Big)<0,$$

porque $\frac{O(\varepsilon^{N-2})}{\varepsilon^{N-2}}$ é limitado. Por outro lado, como $\gamma>2^*$, podemos encontrar δ com $\gamma\delta>2$ e $N(1-\delta)>2$, i.e., $\delta\in(\frac{2}{\gamma},\frac{N-2}{N})$, tal que para ε suficientemente pequeno

$$O(\varepsilon^{\gamma\delta})+O(\varepsilon^{N(1-\delta)})=\varepsilon^2\Big(\frac{O(\varepsilon^{\gamma\delta})}{\varepsilon^{\gamma\delta}}\varepsilon^{\gamma\delta-2}+\frac{O(\varepsilon^{N(1-\delta)})}{\varepsilon^{N(1-\delta)}}\varepsilon^{N(1-\delta)-2}\Big)>0$$

donde

$$\frac{\Big[1-C\varepsilon^2+O(\varepsilon^{N-2})\Big]^{N/2}}{\Big[1+O(\varepsilon^{\gamma\delta})+O(\varepsilon^{N(1-\delta)})\Big]^{(N-2)/2}}<1$$

e portanto,

$$c_\lambda\le\sup_{t>0}\mathcal{J}_\lambda(tu_\varepsilon)<\frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}}.$$

Se $N=4$, então pelos Lemas 1.4.6 e 1.4.8 temos,

$$\sup_{t>0}\mathcal{J}_\lambda(t\psi_\varepsilon)\le\frac{S_0^2}{4\|b\|_\infty}\frac{\Big[1-C\varepsilon^2|\log\varepsilon^2|+O(\varepsilon^2)\Big]^2}{\Big[1+O(\varepsilon^{\gamma\delta})+O(\varepsilon^{4(1-\delta)})\Big]},$$

com $C > 0$. Pelo argumento anterior, com $\gamma \geq 2^*$, concluímos que

$$c_\lambda \leq \sup_{t>0} \mathcal{J}_\lambda(tu_\varepsilon) < \frac{S_0^2}{4\|b\|_\infty}.$$

$\square$

Demonstração da Proposição 1.4.5, com $\boldsymbol{N = 3}$. Pelo Lema 1.4.3,

$$G(x,s) \geq b(x)\left[\frac{1}{6}s^{+6} + w_0 s^{+5}\right],$$

para todo $s \geq 0$, p.q.t. $x \in \Omega$. Logo

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\lambda(t\psi_\varepsilon) &\leq \frac{1}{2}\|\psi_\varepsilon\|^2 t^2 - \frac{t^6}{6}\int_\Omega b(x){\psi_\varepsilon}^6 \,\mathrm{d}x - t^5 \int_\Omega b(x) w_0 \psi_\varepsilon^5 \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\|\psi_\varepsilon\|^2 t^2 - \frac{t^6}{6}\int_\Omega b(x){\psi_\varepsilon}^6 \,\mathrm{d}x - t^5 \frac{C}{5}\int_\Omega \psi_\varepsilon^5 \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

com $C > 0$. A última expressão atinge um máximo para $\tau = \tau(\varepsilon)$ tal que

$$\|\psi_\varepsilon\|^2 = \tau^4 \int_\Omega b(x){\psi_\varepsilon}^6 \,\mathrm{d}x + C\tau^3 \int_\Omega \psi_\varepsilon^5 \,\mathrm{d}x.$$

Pelos Lemas 1.4.8 e 1.4.6 temos, respetivamente,

$$\int_\Omega b(x)\psi_\varepsilon^6 \,\mathrm{d}x = \|b\|_\infty S_0^{3/2} + O(\varepsilon^{\gamma\delta}) + O(\varepsilon^{3(1-\delta)})$$

e

$$\|\psi_\varepsilon\|_5^5 = C_3 \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon^{5/2}).$$

Donde concluímos que

$$\tau = \frac{1}{\|b\|_\infty^{1/4}} - \frac{C_3}{4\|b\|_\infty S_0^{3/2}}\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon^{1/2}).$$

Como $\gamma > 3/5$, podemos encontrar δ tal que $\gamma\delta > 1/2$ e $3(1-\delta) > 1/2$. Portanto, para ε suficientemente pequeno

$$\sup_{t>0} \mathcal{J}_\lambda(t\psi_\varepsilon) \leq \frac{S_0^{3/2}}{3\|b\|_\infty^{1/2}} - \frac{k}{5\|b\|_\infty^{5/4}}\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon^{1/2}) < \frac{S_0^{3/2}}{3\|b\|_\infty^{1/2}}.$$

$\square$

Demonstração do Teorema 1.5. O Lema 1.4.12 mostra que o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, para

$$c < \frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}}.$$

Como 0 é o único ponto crítico do funcional $\mathcal{J}_\lambda$ pela Observação 1.3.13 existe uma constante $R > 0$ tal que

$$\mathcal{J}_\lambda(0) < \inf\{\mathcal{J}_\lambda(u) : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\| = R\}.$$

Além disso, pelos Lemas 1.4.4 e 1.4.5 existe uma função $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u_1\| > R$ tal que

$$\inf \max \mathcal{J}_\lambda < \frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}}.$$

Portanto estamos nas condições do Teorema da Passagem da Montanha, que nos garante a existência de um ponto crítico, $u > 0$, do funcional $\mathcal{J}_\lambda$, o que contradiz a hipótese de zero ser o único ponto crítico do funcional $\mathcal{J}_\lambda$. Portanto o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ tem um ponto crítico não nulo. Pelo Lema 1.3.7 concluímos a demonstração. $\square$

Corolário 1.4.10. *Consideremos o problema (1.2)*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x) u^q + b(x) u^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $0 \le q < 1 < p$ e as funções $a, b \in L^\infty(\Omega)$. Em adição as hipóteses (i) e (ii) do Corolário 1.2.6, suponhamos que $p = 2^* - 1$ e a função b satisfaz a hipótese (H_{2^*}). Então, para $\lambda \in (0, \Lambda)$, o problema (1.2) tem, pelo menos, duas soluções positivas, w e v, tais que $w < v$ em Ω, $\partial w/\partial\nu > \partial v/\partial\nu$ sobre Γ e $J_\lambda(w) < 0$.

Demonstração. Claramente a função $a_\lambda(x, s) = \lambda a(x) s^q$ satisfaz as hipóteses (H_4) e (H_5), logo o Teorema 1.5 garante o resultado. $\square$

Teorema 1.6. *Suponhamos que as hipóteses $(M)'$, $(H_0)'$, (H_1), (H_2), (H_3) são satisfeitas. Suponhamos ainda que a função a_λ satisfaz as hipóteses (H_4), com $\sigma \in [1, 2^*)$ e (H_5). Além disso, a função b satisfaz a hipótese (H_{2^*}) e $b(x) \ge 0$, para todo $x \in \Omega$. Então, se $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema $(1.1)_\lambda$ tem, pelo menos, duas soluções positivas, w e v, tais que $w < v$ em Ω, $\partial w/\partial\nu > \partial v/\partial\nu$ sobre Γ e $J_\lambda(w) < 0$.*

Observação 1.4.11. *A diferença entre os Teoremas 1.5 e 1.6 consiste no facto da função a_λ poder ter qualquer crescimento subcrítico e em compensação a função a_λ satisfaz a hipótese (H_5) e $b(x) \ge 0$, em Ω. Desta forma a demonstração dos teoremas é semelhante com a exceção da prova da condição de Palais-Smale.*

Lema 1.4.12. *Suponhamos que a função a_λ satisfaz a hipótese (H_4) para $\sigma \in [1, 2^*)$. Suponhamos que 0 é o único ponto crítico do funcional $\mathcal{J}_\lambda$. Seja*

$$c < c^* = \frac{S_0^{N/2}}{N\|b\|_\infty^{(N-2)/2}},$$

então o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Consideremos a sucessão $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{J}_\lambda(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_\lambda{}'(u_n) \to 0.$$

Então, existe uma constante $D > c$ tal que para n suficientemente grande

$$\mathcal{J}_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega G_\lambda(x, u_n)\, \mathrm{d}x \leq D, \tag{1.24}$$

e

$$\mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)\varphi = \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \varphi\, \mathrm{d}x - \int_\Omega g_\lambda(x, u_n)\varphi\, \mathrm{d}x \leq \varepsilon_n \|\varphi\|, \tag{1.25}$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ e $\varepsilon_n \to 0$.

Consideremos as constantes $\theta > 2$, $\rho \in [1, 2)$ e $d, s_0 \geq 0$, dadas pela hipótese (H_5). Com objetivo de provar que a sucessão $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, analisemos a diferença entre $\mathcal{J}_\lambda(u_n)$ e $\dfrac{1}{\theta}\mathcal{J}_\lambda{}'(u_n)(w_0 + u_n)$.

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\Big)\|u_n\|^2 - \int_\Omega A_\lambda(x, w_0 + u_n^+) - \frac{1}{\theta}\Big(a_\lambda(x, w_0 + u_n^+)\Big)(w_0 + u_n^+)\, \mathrm{d}x \\ - \Big(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{\theta}\Big)\int_\Omega b(x)(w_0 + u_n^+)^{2^*}\, \mathrm{d}x + U_n.\end{aligned}$$

onde $\|U_n\| \leq C + C'\|u_n\|$. Pela hipótese (H_5)

$$A_\lambda(x, w_0 + u_n^+) - \frac{1}{\theta}\Big(a_\lambda(x, w_0 + u_n^+)\Big)(w_0 + u_n^+) \leq \frac{d}{\theta}(w_0 + u_n^+)^\rho$$

Logo, pelas desigualdades (1.24) e (1.25) temos

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\Big)\|u_n\|^2 \leq \int_\Omega \frac{d}{\theta}(w_0 + u_n^+)^\rho\, \mathrm{d}x + \Big(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{\theta}\Big)\int_\Omega b(x)(w_0 + u_n^+)^{2^*}\, \mathrm{d}x \\ + U_n + C + \frac{\varepsilon_n}{\theta}\|w_0 + u_n\|.\end{aligned}$$

Como $b(x) \geq 0$ em Ω e $\theta \in (2, 2^*)$ concluímos que a sucessão $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. A conclusão da demonstração segue igual ao Lema 1.4.12. $\square$

Corolário 1.4.13. *Consideremos o problema (1.3)*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda c(x)(u+1)^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $p = 2^* - 1$ e a função $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$ em Ω e $c(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ numa bola $B_0 \subset \Omega$. Se a função c satisfaz a hipótese (H_{2^*}), então, para $\lambda \in (0, \Lambda)$, o problema (1.3) tem, pelo menos, duas soluções positivas, w e v, tais que $w < v$ em Ω, $\partial w/\partial\nu > \partial v/\partial\nu$ sobre Γ e $J_\lambda(w) < 0$.

Demonstração. Observemos que $\tilde{u}$ é solução do problema (1.3) se, e só se, $u = \mu\tilde{u}$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = c(x)(u+\mu)^{2^*-1} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

com $\mu = \lambda^{1/(2^*-1)}$. De modo a aplicarmos o Teorema 1.6 escrevemos

$$f_\mu(x,s) = c(x)\big(s+\mu\big)^{2^*-1} = a_\mu(x,s) - c(x)s^{2^*-1}$$

onde $a_\mu(x,s) = c(x)\Big[\big(s+\mu\big)^{2^*-1} - s^{2^*-1}\Big]$. Facilmente vemos que existem constantes $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$(s+\mu)^{2^*-1} - s^{2^*-1} \leq d_1 + d_2 s^{2^*-2}$$

para todo $s > 0$, o que satisfaz a hipótese (H_4), com $\sigma = 2^* - 2$. Considerando $\theta \in [2, 2^*)$, então para s suficientemente grande

$$\begin{aligned} &\theta A_\mu(x,s) - s a_\mu(x,s) \\ &\leq \frac{\theta}{2^*} c(x)\Big[(s+\mu)^{2^*} - s^{2^*}\Big] - c(x)\Big[(s+\mu)^{2^*-1} - s^{2^*-1}\Big]s \\ &= c(x)\Bigg[(s+\mu)^{2^*-1}\Big[\Big(\frac{\theta}{2^*} - 1\Big)(s+\mu) + \mu\Big] - s^{2^*-1}\Big(\frac{\theta}{2^*}s - 1\Big)\Bigg] \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

o que satisfaz a hipótese (H_5) com $d = 0$. A conclusão segue pelo Teorema 1.6. $\square$

Capítulo 2

Existência de duas soluções positivas - método II

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos provar a existência de duas soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{2.1}$$

utilizando a *Variedade de Nehari* e as chamadas *Fibering Maps*. Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, com fronteira Γ regular, $N \geq 3$, $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$, $\lambda > 0$ e as funções $a,\ b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são de classe C^∞, e assumem valores positivos em subdomínios de Ω de medida positiva, mas podem mudar de sinal. De forma a simplificar as notações iremos definir para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$A(u) := \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}\,\mathrm{d}x, \quad B(u) := \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}\,\mathrm{d}x.$$

Assim, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, o problema (2.1) tem como funcional associado

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}A(u) - \frac{1}{p+1}B(u).$$

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (2.1) se

$$J'_\lambda(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{q-1}u\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega b(x)|u|^{p-1}u\varphi\,\mathrm{d}x = 0,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Consideremos o seguinte subconjunto de $H_0^1(\Omega)$, denominado *Variedade de Nehari*,

$$\mathcal{N}_\lambda(\Omega) := \{u \in H_0^1(\Omega) : J'_\lambda(u)u = 0,\ u \neq 0\}.$$

Observemos que se u é um ponto crítico do funcional J_λ, i.e.,

$$J'_\lambda(u)\varphi = 0$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, então $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Iremos ver que os ponto de mínimo local do funcional J_λ em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, são pontos críticos quando consideramos o funcional no espaço todo. A ideia será minimizar o funcional J_λ em dois subconjuntos disjuntos de $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$.

2.2 *Fibering Maps*

Vamos começar por estabelecer um lema que justifica a utilização do método de minimização na *Variedade de Nehari*, na procura de soluções do problema (2.1).

Observação 2.2.1. *Se $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, temos*

$$\|u\|^2 - B(u) = \lambda A(u) \quad e \quad \|u\|^2 - \lambda A(u) = B(u),$$

donde vemos que

$$J_\lambda(u) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1})\|u\|^2 + (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1})B(u) \tag{2.2}$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u\|^2 - \lambda(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1})A(u). \tag{2.3}$$

Lema 2.2.2. *O funcional J_λ é coercivo e limitado inferiormente em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, por (2.3) e pela injeção (compacta) de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^{q+1}(\Omega)$, com $q+1 \in (1,2)$, temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)\|u\|^2 - \lambda\Big(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\Big)A(u) \\ &\geq \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\Big)\|u\|^2 - \lambda\Big(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\Big)S\|a\|_\infty\|u\|^{q+1}. \end{aligned}$$

Logo, J_λ é coercivo e limitado inferiormente em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. □

Consideremos as funções reais de variável positiva, denominadas *Fibering Maps*, definidas, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, da forma que se segue

$$\phi_u(t) := J_\lambda(tu) = \frac{1}{2}\|u\|^2t^2 - \lambda\frac{A(u)}{q+1}t^{q+1} - \frac{B(u)}{p+1}t^{p+1}.$$

Assim, derivando ϕ_u em ordem a t obtemos

$$\begin{aligned} \phi'_u(t) &= \|u\|^2t - \lambda A(u)t^q - B(u)t^p, \\ \phi''_u(t) &= \|u\|^2 - \lambda qA(u)t^{q-1} - pB(u)t^{p-1}. \end{aligned}$$

O seguinte lema é a chave da relação entre a *Variedade de Nehari* e as *Fibering Maps*, garantindo uma correspondência entre os pontos críticos de ϕ_u e os elementos de $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$.

Lema 2.2.3. *Sejam $u \in H_0^1(\Omega)$ e $t > 0$, então*

$$tu \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \iff \phi_u'(t) = 0.$$

Em particular, $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) \iff \phi_u'(1) = 0$.

Demonstração. Pela definição de *Variedade de Nehari*, $tu \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ se, e só se, $J_\lambda'(tu)tu = 0$. Portanto

$$0 = J_\lambda'(tu)tu = \|u\|^2t^2 - \lambda A(u)t^{q+1} - B(u)t^{p+1} = t\phi_u'(t),$$

logo, $\phi_u'(t) = 0$. □

Assim, como $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ se, e só se, $\phi_u'(1) = 0$ é natural dividir a *Variedade de Nehari* em três conjuntos disjuntos que correspondem, respetivamente, aos pontos de mínimo local, de máximo local e de sela de ϕ_u, ou seja

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) : \phi_u''(1) > 0\},\\
\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) : \phi_u''(1) < 0\},\\
\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega) : \phi_u''(1) = 0\}.
\end{aligned}$$

O seguinte lema garante que um ponto crítico, $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, do funcional J_λ restringindo à *Variedade de Nehari* tal que $u \notin \mathcal{N}_\lambda^0(\Omega)$ é na realidade um ponto crítico em $H_0^1(\Omega)$.

Lema 2.2.4. *Seja $u_0 \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ ponto de máximo ou mínimo local do funcional J_λ em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Se $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0(\Omega)$, então u_0 é um ponto crítico de J_λ em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Consideremos $G(u) := J_\lambda'(u)u$, para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, então temos

$$\mathcal{N}_\lambda(\Omega) = G^{-1}(0)\backslash\{0\}.$$

Seja $u_0 \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ ponto de máximo ou mínimo local do funcional J_λ em $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$. Pelo Método dos multiplicadores de Lagrange, existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J_\lambda'(u_0) = \delta G'(u_0), \tag{2.4}$$

Vamos ver que $\delta = 0$. Como $J_\lambda'(u_0)u_0 = 0$ temos

$$\|u_0\|^2 = \lambda A(u_0) + B(u_0). \tag{2.5}$$

Por outro lado, para $u \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$

$$G'(u)u = 2\|u\|^2 - \lambda(q+1)A(u) - (p+1)B(u). \tag{2.6}$$

Então utilizando (2.5) e (2.6) obtemos

$$G'(u_0)u_0 = \|u_0\|^2 - \lambda qA(u_0) - pB(u_0) = \phi_{u_0}''(1).$$

Como, $u_0 \notin \mathcal{N}_\lambda^0(\Omega)$, então $G'(u_0)u_0 = \phi_{u_0}''(1) \neq 0$. Usando (2.4), temos

$$0 = J_\lambda'(u_0)u_0 = \delta G'(u_0)u_0,$$

donde $\delta = 0$. Por (2.4), concluímos que $J_\lambda'(u_0) = 0$, i.e., u_0 é ponto crítico de J_λ em $H_0^1(\Omega)$. □

Assim, a relação entre a *Variedade de Nehari* e as *Fibering Maps*, torna importante o estudo dos pontos críticos das *Fibering Maps*. De forma a simplificar o estudo análitico das *Fibering Maps* observemos que

$$\phi_u'(t) = \|u\|^2 t - \lambda A(u)t^q - B(u)t^p = t^q\big(\|u\|^2 t^{1-q} - \lambda A(u) - B(u)t^{p-q}\big).$$

Assim, vamos considerar a função real de variável positiva

$$m_u(t) := \|u\|^2 t^{1-q} - B(u)t^{p-q}.$$

Portanto, $t > 0$ é um ponto crítico de ϕ_u se, e só se, é uma solução da equação

$$m_u(t) = \lambda A(u). \tag{2.7}$$

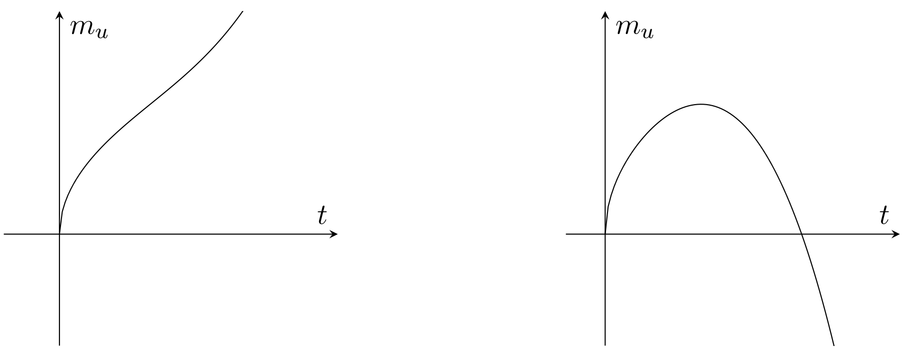
Derivando m_u em ordem a t obtemos

$$m_u'(t) = (1-q)\|u\|^2 t^{-q} - (p-q)B(u)t^{p-q-1}.$$

Assim, se $B(u) \leq 0$, então m_u é uma função positiva, estritamente crescente e tem um gráfico como a Figura 2.3a. Se $B(u) > 0$, então m_u tem um único máximo positivo,

$$\lim_{t\to\infty} m_u(t) = -\infty,$$

e tem um gráfico como a Figura 2.5a.



(a) $B \leq 0$ (b) $B > 0$

Figura 2.1: Possíveis formas para m_u.

Pela observação dos gráficos, concluímos de imediato que a equação (2.7) pode ter no máximo uma solução, quando $B \leq 0$ e no máximo duas soluções quando $B > 0$.

Lema 2.2.5. *Seja* $tu \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, *então* $\phi_{tu}''(1) = t^{q+2}m_u'(t)$.

Demonstração. Se $\phi_u'(1) = 0$, então $\|u\|^2 - B(u) = \lambda A(u)$, donde

$$\phi_u''(1) = (1-q)\|u\|^2 - (p-q)B(u).$$

Seja $tu \in \mathcal{N}_\lambda(\Omega)$, então temos

$$\begin{aligned}\phi''_{tu}(1) &= (1-q)\|u\|^2 t^2 - (p-q)B(u)t^{p+1} \\ &= t^{q+2}\big[(1-q)\|u\|^2 t^{-q} - (p-q)B(u)t^{p-q-1}\big] \\ &= t^{q+2} m'_u(t).\end{aligned}$$

□

Observação 2.2.6. *Se $t > 0$ é solução da equação (2.7) e sabemos o sinal de $m'_u(t)$, então, pelo Lema 2.2.3, sabemos se $u \in H_0^1(\Omega)$ é um ponto de máximo, de mínimo, ou de sela.*

Lema 2.2.7.

$$tu \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega) \iff m'_u(t) > 0, \tag{2.8}$$

$$tu \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega) \iff m'_u(t) < 0. \tag{2.9}$$

Demonstração. O resultado segue pelo Lema 2.2.5,

$$\begin{aligned} tu \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega) &\iff \phi''_{tu}(1) > 0 \iff m'_u(t) > 0 \\ tu \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega) &\iff \phi''_{tu}(1) < 0 \iff m'_u(t) < 0. \end{aligned}$$

□

Passamos então à análise das *Fibering Maps*, i.e.,

$$\phi_u(t) = \frac{1}{2}\|u\|^2 t^2 - \lambda \frac{A(u)}{q+1} t^{q+1} - \frac{B(u)}{p+1} t^{p+1},$$

para $u \in H_0^1(\Omega)$ e $t > 0$. Iremos ver que ϕ_u, tem no máximo dois pontos críticos, em função dos sinais de $A(u)$ e $B(u)$, os quais representaremos por $t_1 = t_1(u)$ e por $t_2 = t_2(u)$. Observemos que o sinal de $A(u)$ determina o sinal de ϕ_u perto de zero,

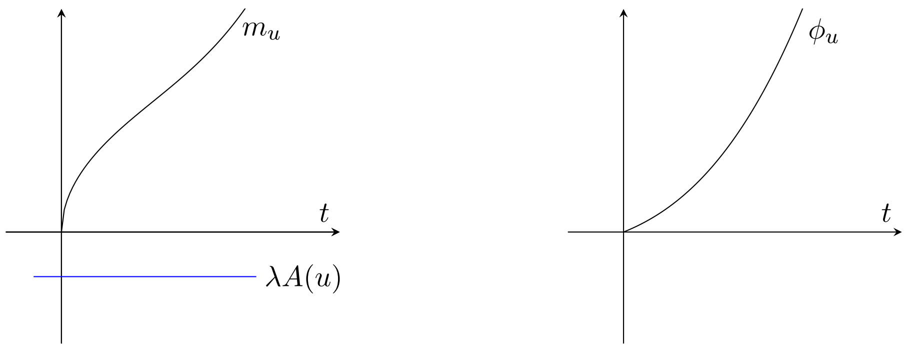
$$\phi_u(t) > 0, \text{ numa vizinhança de } 0, \text{ se } A(u) \leq 0 \tag{2.10}$$

$$\phi_u(t) < 0, \text{ numa vizinhança de } 0, \text{ se } A(u) > 0. \tag{2.11}$$

Caso $\boldsymbol{B(u) \leq 0}$: Consideremos $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $B(u) \leq 0$, então m_u é uma função positiva, estritamente crescente e tem um gráfico como 2.3a. Observemos que

$$\lim_{t\to\infty} \phi_u(t) = +\infty.$$

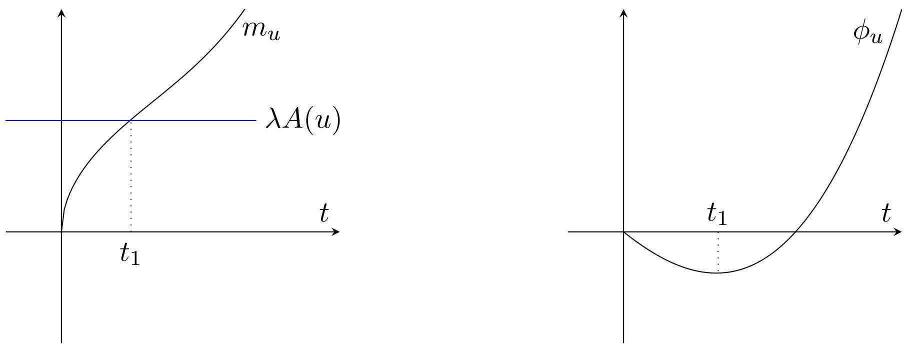
- Se $A(u) \leq 0$, então a equação (2.7) não tem solução, logo ϕ_u não tem pontos críticos. ϕ_u tem um gráfico como a Figura 2.2*b*.



(a) gráfico de m_u (b) grafico de ϕ_u

Figura 2.2: Possíveis formas para ϕ_u e m_u, com $A(u), B(u) \leq 0$.

- Se $A(u) > 0$, então a equação (2.7) tem exatamente uma solução, $t_1 > 0$. Logo, por (2.8), $t_1 u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e por (2.11), $\phi_u(t_1)$ é um mínimo negativo. ϕ_u tem um gráfico como a Figura 2.3*b*.



(a) gráfico de m_u (b) gráfico de ϕ_u

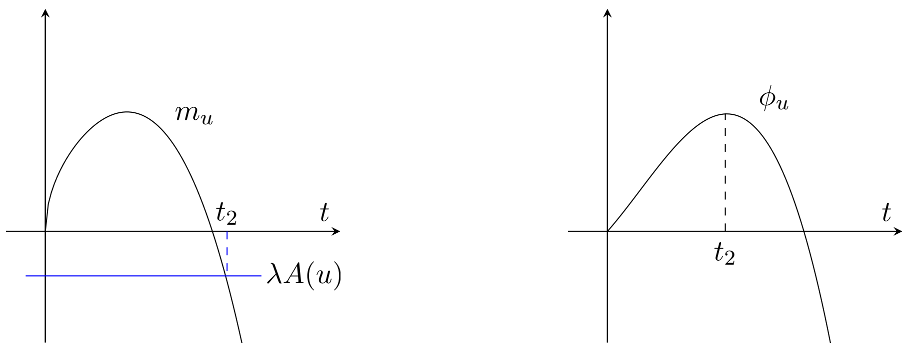
Figura 2.3: Possíveis formas para ϕ_u e m_u, com $A(u) > 0$, $B(u) \leq 0$.

Caso $\boldsymbol{B(u) > 0}$: Suponhamos agora que $B(u) > 0$, então m_u tem um gráfico como 2.5a. Seja $t_{\max} = t_{\max}(u)$ o ponto de máximo de m_u. Se $t_1 < t_{\max}$ é solução de $m_u(t) = \lambda A(u)$, então, por (2.8), $t_1 u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, i.e., $\phi_u(t_1)$ é um mínimo local. Se $t_2 > t_{\max}$ é solução de $m_u(t) = \lambda A(u)$, então, por (2.9), $t_2 u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, i.e., $\phi_u(t_2)$ é um máximo local. Observemos que

$$\lim_{t \to \infty} \phi_u(t) = -\infty.$$

- Se $A(u) \leq 0$, então a equação (2.7) tem exatamente uma solução, $t_2 > 0$. Logo $t_2 u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ e, por (2.10), $\phi_u(t_2)$ é um máximo positivo. ϕ_u tem um gráfico como a Figura 2.4*b*.

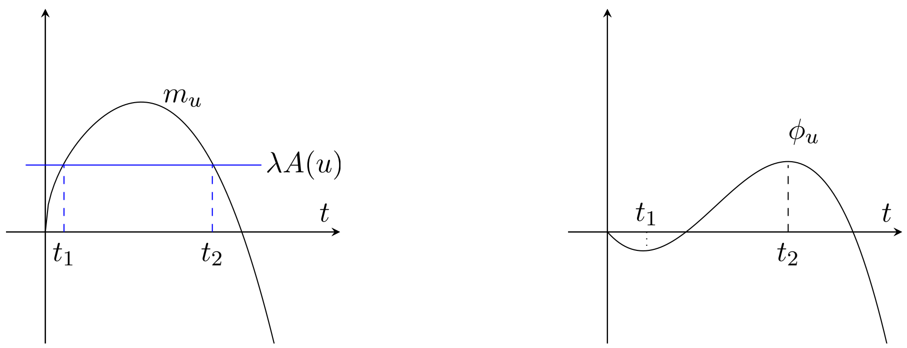
- Suponhamos que $A(u) > 0$. Se $\lambda > 0$ for suficientemente grande então a equação (2.7) não tem solução. Se, por contrário, λ for suficientemente pequeno, então a



(a) gráfico de m_u (b) gráfico de ϕ_u

Figura 2.4: Possíveis formas para ϕ_u e m_u, com $A(u) \leq 0$, $B(u) > 0$.

equação (2.7) tem exatamente duas soluções t_1 e t_2 tais que $t_1 < t_{\max} < t_2$. Logo $t_1 u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e $t_2 u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Portanto, ϕ_u tem um mínimo local em t_1 e um máximo em t_2. Por (2.11) concluímos que $\phi_u(t_1)$ é um mínimo local negativo. Além disso, iremos ver (cf. Lema 2.2.8) que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno $\phi_u(t_2)$ é um máximo positivo. ϕ_u tem um gráfico como a Figura 2.5*b*.



(a) gráfico de m_u (b) gráfico de ϕ_u

Figura 2.5: Possíveis formas para ϕ_u e m_u, com $A(u), B(u) > 0$.

Lema 2.2.8. *Seja $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $B(u) > 0$, então existe $\Lambda > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, ϕ_u tem valores positivos.*

Demonstração. Consideremos $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $B(u) > 0$. Seja

$$g_u(t) := \phi_u(t) + \frac{\lambda}{q+1} A(u) t^{q+1} = \frac{1}{2}\|u\|^2 t^2 - \frac{B(u)}{p+1} t^{p+1}.$$

Queremos ver que existem $\Lambda, t > 0$ tais que para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$

$$\phi_u(t) = g_u(t) - \frac{\lambda}{q+1} A(u) t^{q+1} > 0.$$

Derivando g_u temos

$$g_u'(t) = \|u\|^2 t - B(u)t^p,$$

logo g_u atinge o máximo em

$$\tau = \left[\frac{\|u\|^2}{B(u)}\right]^{1/(p-1)},$$

com valor

$$\begin{aligned}
g_u(\tau) &= \left(\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{B(u)}{p+1}\frac{\|u\|^2}{B(u)}\right)\tau^2 \\
&= \frac{p-1}{2(p+1)}\|u\|^2\left[\frac{\|u\|^2}{B(u)}\right]^{2/(p-1)} \\
&= \frac{p-1}{2(p+1)}\left[\frac{\|u\|^{2(p+1)}}{B(u)^2}\right]^{1/(p-1)}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Pela injeção de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$, existe uma constante S tal que $\|u\|_{p+1} \leq S\|u\|$, donde

$$\left[\frac{\|u\|}{\|u\|_{p+1}}\right]^{2(p+1)} \geq (1/S)^{2(p+1)}.$$

Então temos

$$\begin{aligned}
g_u(\tau) &= \frac{p-1}{2(p+1)}\left[\frac{\|u\|^{2(p+1)}}{B(u)^2}\right]^{1/(p-1)} \\
&\geq \frac{p-1}{2(p+1)}\left[\frac{\|u\|^{2(p+1)}}{\|b\|_\infty^2\|u\|_{p+1}^{2(p+1)}}\right]^{1/(p-1)} \\
&\geq \frac{p-1}{2(p+1)}\left[\frac{1}{\|b\|_\infty S^{(p+1)}}\right]^{2/(p-1)} := \delta.
\end{aligned}$$

Observemos que δ não depende de $u \in H_0^1(\Omega)$. Pela injeção de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^{q+1}(\Omega)$, existe uma constante, outra vez denotada por S, tal que $\|u\|_{q+1} \leq S\|u\|$, donde

$$\begin{aligned}
\tau^{q+1}A(u) &= \left[\frac{\|u\|^2}{B(u)}\right]^{\frac{q+1}{p-1}} \int_\Omega a(x)u^{q+1}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \left[\frac{\|u\|^2}{B(u)}\right]^{\frac{q+1}{p-1}} \|a\|_\infty (S\|u\|)^{q+1} \\
&= \|a\|_\infty S^{q+1}\left[\frac{\|u\|^{(p+1)}}{B(u)}\right]^{\frac{q+1}{p-1}} \\
&= \|a\|_\infty S^{q+1}\left[\frac{2(p+1)}{p-1}g_u(\tau)\right]^{(q+1)/2},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade vem de (2.12). Observemos que a constante positiva

$$C := \frac{1}{q+1}\|a\|_\infty S^{q+1}\left[\frac{2(p+1)}{p-1}\right]^{(q+1)/2}$$

não depende de u. Portanto temos

$$\begin{aligned}
\phi_u(\tau) &= g_u(\tau) - \frac{\lambda}{q+1}A(u)\tau^{q+1} \\
&\geq g_u(\tau) - \lambda C g_u(\tau)^{(q+1)/2} \\
&= g_u(\tau)^{(q+1)/2}\Big[g_u(\tau)^{(1-q)/2} - \lambda C\Big] \\
&\geq \delta^{(q+1)/2}\Big[\delta^{(1-q)/2} - \lambda C\Big].
\end{aligned}$$

Então definindo $\Lambda := \delta^{(1-q)/2}/C$, temos

$$\phi_u(\tau) > 0 \iff \lambda < \Lambda.$$

□

Este lema implica que quando $A(u), B(u) > 0$ e $\lambda < \Lambda$, então ϕ_u tem exatamente dois pontos críticos um de mínimo local negativo e outro de máximo positivo, i.e., ϕ_u tem um gráfico como a Figura 2.5b.

Observação 2.2.9. *Quando $\lambda \in (0,\Lambda)$ já conhecemos a monotonia e os pontos críticos de ϕ_u, logo não existem pontos de sela e portanto podemos concluir que $\mathcal{N}_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$.*

Em resumo, concluímos que se $\lambda \in (0,\Lambda)$ e $A(u) > 0$, então ϕ_u tem um gráfico como a Figura (2.3b) ou (2.5b) e ϕ_u tem um mínimo local negativo. Se, por outro lado, $B(u) > 0$, então ϕ_u tem um gráfico como a Figura (2.4b) ou (2.5b) e ϕ_u tem um máximo positivo. Portanto,

$$\begin{aligned}
A(u) > 0 \quad &\iff \exists\, t > 0,\ tu \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega) \\
&\iff \phi_u(t) \text{ é mínimo local negativo}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
B(u) > 0 \quad &\iff \exists\, t > 0,\ tu \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega) \\
&\iff \phi_u(t) \text{ é máximo local positivo.}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Corolário 2.2.10. *Se $\lambda \in (0,\Lambda)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $J_\lambda(u) \geq \varepsilon$ para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Por outro lado, $J_\lambda(u) < 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$.*

Demonstração. Se $u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, então ϕ_u tem um máximo positivo para $t = 1$ e $B(u) > 0$, então pelo Lema 2.2.8

$$J_\lambda(u) = \phi_u(1) \geq \phi_u(\tau) \geq \delta^{(q+1)/2}\big(\delta^{(1-q)/2} - \lambda C\big) > 0.$$

Se $u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, então ϕ_u tem um mínimo negativo para $t = 1$, portanto $J_\lambda(u) = \phi_u(1) < 0$. □

2.3 Existência de Soluções Positivas

Nesta secção vamos mostrar a existência de duas soluções positivas, quando $\lambda \in (0, \Lambda)$, para o problema (2.1), que são obtidas por minimização do funcional J_λ nos subconjuntos disjuntos da *Variedade de Nehari*, $\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, i.e., vamos ver que

$$\inf_{\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u) \quad \text{e} \quad \inf_{\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u),$$

são atingidos. O estudo feito na secção anterior será aplicado nos teoremas seguintes.

Teorema 2.1. *Existe $\Lambda > 0$ tal que se $\lambda \in (0, \Lambda)$, então o problema (2.1) tem, pelo menos, duas soluções positivas.*

Observação 2.3.1. *Consideremos $\mathcal{M}$ um subconjunto não vazio de $\mathcal{N}_\lambda(\Omega)$ e $\{u_n\} \subset \mathcal{M}$ uma sucessão minimizante em $\mathcal{M}$, i.e.,*

$$\lim J_\lambda(u_n) = \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{M}\}.$$

Pelo Lema 2.2.2 concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, existe uma subsucessão, ainda denotada por u_n, tal que

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup u_0, \quad \text{em } H_0^1(\Omega), \\ &u_n \to u_0, \quad \text{em } L^r(\Omega), \quad \forall\, r \in [1, 2^*). \end{aligned}$$

Teorema 2.2. *Se $\lambda \in (0, \Lambda)$, então o funcional J_λ tem um mínimo em $\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$.*

Demonstração. Pela Observação 2.3.1 existe uma subsucessão $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, tal que

$$\lim J_\lambda(u_n) = \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)\}$$

e

$$u_n \rightharpoonup u_0, \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Queremos provar que u_0 é um ponto de mínimo para J_λ em $\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$. Pelo Corolário 2.2.10, $J_\lambda(u_n) < 0$, para todo $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, donde concluímos que

$$\inf\{J_\lambda(u) : \; u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)\} < 0,$$

i.e., existe $\varepsilon_1 < 0$ tal que $\lim J_\lambda(u_n) < \varepsilon_1$. Sabemos, pela equação (2.3), que

$$J_\lambda(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \|u_n\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) A(u_n),$$

donde,

$$\lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right) A(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \|u_n\|^2 - J_\lambda(u_n) > 0.$$

Fazendo n tender para infinito obtemos $A(u_0) > 0$. Então por (2.13), existe $t_0 > 0$ tal que $t_0 u_0 \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e $\phi_{u_0}(t_0)$ é mínimo local negativo, e ϕ_{u_0} é estritamente decrescente no intervalo $(0, t_0)$.

Tendo em vista um absurdo, suponhamos que $u_n \not\to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Lema A.8.3, temos

$$\liminf \|u_n\|^2 > \|u_0\|^2, \tag{2.15}$$

donde,

$$\begin{aligned}\liminf \phi'_{u_n}(t_0) &= \liminf \left(\|u_n\|^2 t_0 - \lambda A(u_n) t_0^q - B(u_n) t_0^p\right)\\ &> \|u_0\|^2 t_0 - \lambda A(u_0) t_0^q - B(u_0) t_0^p\\ &= \phi'_{u_0}(t_0) = 0.\end{aligned}$$

Assim, para n suficientemente grande, $0 < \phi'_{u_n}(t_0)$. Como $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$, $\phi'_{u_n}(1) = 0$ e $\phi_{u_n}(1)$ é mínimo local, donde $\phi'_{u_n}(t) < 0$ para $t \in (0,1)$. Então para todo $t \in (0,1]$

$$\phi'_{u_n}(t) < \phi'_{u_n}(t_0),$$

donde $1 < t_0$. Portanto, como t_0 é um ponto mínimo de ϕ_{u_0} temos

$$\phi_{u_0}(1) > \phi_{u_0}(t_0).$$

Pela definição de *Fibering Maps* temos

$$\begin{aligned}J_\lambda(t_0 u_0) &< J_\lambda(u_0)\\ &<^1 \lim J_\lambda(u_n),\\ &= \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)\},\end{aligned}$$

o que é absurdo, porque $t_0 u_0 \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$. Logo $u_n \to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, donde

$$J_\lambda(u_0) = \lim J_\lambda(u_n) = \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)\},$$

i.e., u_0 é um minimizante do funcional J_λ em $\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e $J_\lambda(u_0) < 0$. □

Teorema 2.3. *Se $\lambda \in (0,\Lambda)$, então o funcional J_λ tem um mínimo em $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$.*

Demonstração. Pela Observação 2.3.1 existe uma subsucessão $\{u_n\} \subset \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, tal que

$$\lim J_\lambda(u_n) = \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)\}$$

e

$$u_n \rightharpoonup u_0, \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Queremos provar que u_0 é um ponto de mínimo para J_λ em $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Pelo Corolário 2.2.10, existe $\varepsilon > 0$ tal que $J_\lambda(u_n) \geq \varepsilon$, para todo $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, donde concluímos que $\inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)\} > 0$. Sabemos, pela equação (2.2). que

$$J_\lambda(u_n) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1})\|u_n\|^2 + (\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1})B(u_n),$$

[1] Por (2.15). Além disso, observemos que $u_n \to u_0$, em $L^r(\Omega)$, $1 \leq r < 2^*$.

donde,

$$(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1})B(u_n)=J_\lambda(u_n)-(\frac{1}{2}-\frac{1}{q+1})\|u_n\|^2>0.$$

Fazendo n tender para infinito obtemos $B(u_0)>0$. Então por (2.14), existe $t_0>0$ tal que $t_0u_0\in\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ e $\phi_{u_0}(t_0)$ é máximo positivo, tal que ϕ_{u_0} é estritamente crescente no intervalo $(0,t_0)$.

Tendo em vista um absurdo, suponhamos que $u_n\not\to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Lema A.8.3, temos

$$\liminf\|u_n\|^2>\|u_0\|^2, \tag{2.16}$$

Como $u_n\in\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, então $t=1$ é o maximizante de ϕ_{u_n}, donde para todo $t>0$

$$\phi_{u_n}(t)\le\phi_{u_n}(1).$$

Assim, pela definição de Fibering Map, temos

$$\begin{aligned}J_\lambda(t_0u_0)&<^2\lim J_\lambda(t_0u_n),\\&\le\lim J_\lambda(u_n)\\&=\inf\{J_\lambda(u):u\in\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)\},\end{aligned}$$

O que é absurdo, porque $t_0u_0\in\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$. Logo $u_n\to u_0$ em $H_0^1(\Omega)$, donde

$$J_\lambda(u_0)=\lim J_\lambda(u_n)=\inf\{J_\lambda(u):u\in\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)\},$$

i.e., u_0 é um minimizante de J_λ em $\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ e $J_\lambda(u_0)>0$. □

Demonstração do Teorema 2.1. Pelos Teoremas 2.2 e 2.3 existem $u_+\in\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e $u_-\in\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$ tais que

$$J(u_+)=\inf\{J(u):u\in\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)\}$$

e

$$J(u_-)=\inf\{J(u):u\in\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)\}.$$

Como $J(u)=J(|u|)$, $|u_+|\in\mathcal{N}_\lambda^+(\Omega)$ e $|u_-|\in\mathcal{N}_\lambda^-(\Omega)$, podemos assumir que $u_+,\ u_-\ge0$. Pelo Lema 2.2.4, u_+ e u_- são pontos críticos de J_λ em $H_0^1(\Omega)$, logo soluções do problema (2.1). Pela desigualdade de Harnack (ver [27]) concluímos que u_+ e u_- são soluções positivas de (2.1). □

[2] Por (2.16). Além disso, observemos que $u_n\to u_0$, em $L^r(\Omega)$, $1\le r<2^*$.

Apêndice A

A.1 Pontos críticos

Consideremos o espaço E e o funcional $J : E \to \mathbb{R}$.

Definição A.1.1. *O funcional J diz-se semicontínuo inferiormente (s.c.i.) se $J^{-1}[-\infty, C]$ é fechado para todo $C \in \mathbb{R}$. O funcional J diz-se sequencial fracamente s.c.i. se*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E \implies J(u) \leq \liminf J(u_n).$$

Definição A.1.2. *O funcional J diz-se coercivo se*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} J(u) = \infty.$$

Teorema A.1 (Existência de Mínimo)**.** *Seja E um espaço Banach reflexivo, $M \subset E$ convexo, fechado e $J : M \to [-\infty, +\infty]$ sequencial fracamente s.c.i..*

1. *Se M é limitado, então J tem um mínimo em M.*

2. *Se J é coerciva, então tem um mínimo em M.*

Demonstração. Cf. [22, pg. 12]. □

Definição A.1.3. *Dizemos que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale em E e escrevemos (PS), se $\forall \{u_n\} \subset E$ tal que $\{J(u_n)\}$ é limitada e $J'(u_n) \to 0$, tem uma subsucessão convergente.*

Dizemos que o funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale no nivel c em E e escrevemos $(PS)_c$, onde $c \in \mathbb{R}$, se $\forall \{u_n\} \subset E$ tal que $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$, tem uma subsucessão convergente.

Dizemos que o funcional J satisfaz $(PS)_c$ fraca em E, se $\forall \{u_n\} \subset E$ tal que $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$, então c é valor crítico do funcional J.

Teorema A.2 (Teorema da Passagem da Montanha)**.** *Seja $u, v \in E \backslash \{0\}$ tais que $\|u - v\| > r > 0$,*

$$\inf_{\|x-u\|=r} J(x) = b > a = max\{J(u), J(v)\}.$$

Seja $H = \{h \in C([0,1], E) : h(0) = u, h(1) = v\}$ *e*

$$c = \inf_{h \in H} \max_{t \in [0,1]} J(h(t)).$$

Se J *satisfaz* $(PS)_c$ *fraca, então* c *é valor crítico de* J.

Demonstração. Cf. [22, pg. 48]. □

A.2 Subsoluções e sobresoluções

Definição A.2.1. *Uma função* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diz-se de Carathéodory se satisfaz:*

1. $\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x,u)$ *é mensurável em* Ω*;*
2. $\forall\, x \in \Omega, \quad u \mapsto f(x,u)$ *é contínua.*

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{A.1}$$

Definição A.2.2. *Dizemos que* $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ *é subsolução fraca de (A.1) se* $\underline{u} \leq 0$ *sobre* Γ *e*

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \cdot \nabla \varphi \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega f(x, \underline{u}) \varphi \,\mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0.$$

Se $\overline{u}$ *satisfaz as condições anteriores com a desigualdade* $\geq$*, enão* $\overline{u}$ *diz-se sobresolução de (A.1).*

Teorema A.3. *Consideremos* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de Carathéodory, tal que para todo* $s_0 > 0$*, existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $|f(x,s)| \leq C$*, para todo* $s \in [0, s_0]$ *e p.q.t.* $x \in \Omega$*. Sejam* $\underline{c}$*,* $\overline{c} \in \mathbb{R}$ *e* $\underline{u}$*,* $\overline{u}$ *subsolução e sobresolução, respetivamente, do problema (A.1). Se* $-\infty < \underline{c} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{c} < +\infty$*, p.q.t.* $x \in \Omega$*, então o problema (A.1) tem uma solução fraca* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$*, p.q.t.* $x \in \Omega$*.*

A solução fraca u é obtida de uma forma que é importante ao longo dos resultados da dissertação, pelo que optámos por incluir a demonstração neste caso. A demonstração que se segue é adaptada de [26, pg. 17].

Demonstração. Sabemos que as soluções de (A.1) correspondem a pontos críticos do funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F_\lambda(x,u) \,\mathrm{d}x.$$

Consideremos,

$$M = \{u \in H_0^1(\Omega) : \underline{u} \leq u \leq \overline{u},\ \text{p.q.t. } x \in \Omega\}.$$

Por hipótese, $\underline{u}, \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$, logo $M \subset L^\infty(\Omega)$. Além disso, pelas propriedades de f, existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)\,\mathrm{d}t \leq C$, para todo $s \in [0, \overline{c}]$ e p.q.t. $x \in \Omega$. Pelo Teorema A.1, o funcional J tem um mínimo em M:

1. $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo;

2. M é um convexo fechado e essencialmente limitado;

3. $J(u) = \dfrac{1}{2}\|u\|^2 - \displaystyle\int_\Omega F_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x \geq \dfrac{1}{2}\|u\|^2 - C$ em M, donde concluímos que o funcional J é coercivo em M;

4. O funcional J é fracamente s.c.i.: consideremos a sucessão $u_n \rightharpoonup u$ em M. Sabemos que $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$, logo é suficiente mostrar que $\int_\Omega F(x,u_n)\ \mathrm{d}x \to \int_\Omega F_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x$. Pela convergência fraca existe uma subsucessão, ainda denominada por u_n, tal que $u_n(x) \to u(x)$, p.q.t. $x \in \Omega$ e $|F(x,u_n)| \leq C$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos o pretendido.

Portanto o funcional J tem um mínimo $u \in M$. Queremos provar que u é solução fraca de (A.1).

Sejam $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ e $v_\varepsilon = \min\{\overline{u}, \max\{\underline{u}, u+\varepsilon\varphi\}\}$. Facilmente verificamos que $v_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon - \varphi_\varepsilon$, onde

$$\varphi^\varepsilon = \max\{0, u+\varepsilon\varphi - \overline{u}\} \geq 0,$$

$$\varphi_\varepsilon = \min\{0, u+\varepsilon\varphi - \underline{u}\} \leq 0.$$

Suponhamos que $\max\{\underline{u}, u+\varepsilon\varphi\} = u+\varepsilon$, então $\varphi_\varepsilon = 0$. Temos duas hipóteses:

- ou $\min\{\overline{u}, u+\varepsilon\varphi\} = u+\varepsilon\varphi$, donde $\varphi^\varepsilon = 0$ e $v_\varepsilon = u+\varepsilon\varphi$;
- ou $\min\{\overline{u}, u+\varepsilon\varphi\} = \overline{u}$, donde $\varphi^\varepsilon = u+\varepsilon\varphi-\overline{u}$ e $v_\varepsilon = u+\varepsilon\varphi - (u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) = \overline{u}$.

Suponhamos agora que $\max\{\underline{u}, u+\varepsilon\varphi\} = \underline{u}$, então $\varphi_\varepsilon = u+\varepsilon\varphi-\underline{u}$, donde $v_\varepsilon = u+\varepsilon\varphi-(u+\varepsilon\varphi-\underline{u}) - \varphi^\varepsilon = \underline{u} - \varphi^\varepsilon$. Por hipótese $\min\{\underline{u},\overline{u}\} = \underline{u}$, logo $\varphi^\varepsilon = 0$ e $v_\varepsilon = \underline{u}$. Notemos que $\varphi_\varepsilon, \varphi^\varepsilon \in H_0^1 \cap L^\infty(\Omega)$ e além disso $v_\varepsilon \in M$. Como u é mínimo do funcional J em M, temos

$$0 \leq J'(u)(v_\varepsilon - u) = \varepsilon J'(u)(\varphi) - J'(u)(\varphi^\varepsilon) - J'(u)(\varphi_\varepsilon)$$

donde,

$$J'(u)(\varphi) \geq \frac{J'(u)(\varphi^\varepsilon) + J'(u)(\varphi_\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Como $\overline{u}$ é sobresolução fraca do problema (A.1), i.e., $J'(\overline{u})\varphi \geq 0$, para todo $\varphi \in C^\infty(\Omega)$

temos,

$$\begin{aligned}
J'(u)\varphi^\varepsilon &= \big(J'(u)-J'(\overline{u})\big)\varphi^\varepsilon + J'(\overline{u})\varphi^\varepsilon \\
&\geq \big(J'(u)-J'(\overline{u})\big)\varphi^\varepsilon \\
&= \int_\Omega \nabla(u-\overline{u})\cdot\nabla\varphi^\varepsilon - \big(f(x,u)-f(x,\overline{u})\big)\varphi^\varepsilon \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\cdot\nabla(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) - \big(f(x,u)-f(x,\overline{u})\big)(u+\varepsilon\varphi-\overline{u}) \,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\cdot\nabla(\varepsilon\varphi) - \big|f(x,u)-f(x,\overline{u})\big||u+\varepsilon\varphi-\overline{u}| \,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\cdot\nabla(\varepsilon\varphi) - \big|f(x,u)-f(x,\overline{u})\big||\varepsilon\varphi| \,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon} \nabla(u-\overline{u})\cdot\nabla\varphi - \big|f(x,u)-f(x,\overline{u})\big||\varphi| \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

onde $\Omega^\varepsilon = \{x\in\Omega : u(x) < \overline{u}(x) \leq u(x)+\varepsilon\varphi(x)\}$. Notemos que $|\Omega^\varepsilon| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Logo $J'(u)(\varphi^\varepsilon) \geq o(\varepsilon)$. Analogamente, $J'(u)\varphi_\varepsilon \geq o(\varepsilon)$. Portanto, para todo $\varphi \in C^\infty(\Omega)$

$$J'(u)(\varphi) \geq \frac{J'(u)(\varphi^\varepsilon)+J'(u)(\varphi_\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0.$$

Em particular, $0 \leq J'(u)(-\varphi) \leq 0$, ou seja, $J'(u)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Como $C^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ concluímos que $J'(u) = 0$. □

A.3 Princípio Máximo

Os Princípios máximos podem ser encontrados por exemplo em [13], [17] ou [24].

Teorema A.4 (Princípio Máximo fraco)**.** *Seja $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$*

1. *Se $-\Delta u + c(x)u \leq 0$ em Ω, então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_\Gamma u^+.$$

2. *Se $-\Delta u + c(x)u \geq 0$ em Ω, então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_\Gamma u^-.$$

Observação A.3.1. *Se $u \equiv 0$ sobre Γ e $c \equiv 0$ em Ω temos,*

1. *Se $-\Delta u \leq 0$ em Ω, então $u \leq 0$.*
2. *Se $-\Delta u \geq 0$ em Ω, então $u \geq 0$.*

Definição A.3.2. *Consideremos $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \cdots, \nu_N)$ o vetor unitário normal exterior em $x_0 \in \Gamma$. Definimos derivada direcional de u no ponto x_0 com direção $\boldsymbol{\nu}$ como*

$$\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}(x_0) = u_{\boldsymbol{\nu}}(x_0) := \lim_{x\to x_0}[\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla u(x)] = \lim_{x\to x_0}(\nu_1 u_{x_1} + \cdots + \nu_N u_{x_N}).$$

Teorema A.5 (Lema de Hopf). *Seja $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que satisfaça $-\Delta u + c(x)u \leq 0$ em Ω. Suponhamos que existem $x_0 \in \Gamma$ tal que*

$$u(x_0) \geq 0 \quad e \quad u(x_0) > u(x)$$

para todo $x \in \Omega$ e uma bola $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$, então

$$u_{\boldsymbol{\nu}}(x_0) > 0.$$

Teorema A.6 (Príncípio Máximo Forte). *Suponhamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, e que Ω é conexo.*

1. *Se $-\Delta u + c(x)u \leq 0$ em Ω e u atinge um máximo não negativo no interior de Ω, então u é constante em Ω.*
2. *Se $-\Delta u + c(x)u \geq 0$ em Ω, e u atinge um mínimo não positivo no interior de Ω, então u é constante em Ω.*

Observação A.3.3. *Suponhamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ não é constante, então Pelo Príncipio Máximo Forte e o Lema de Holf,*

1. *se $-\Delta u + c(x)u \leq 0$ em Ω, então $u < 0$ em Ω e $u_{\boldsymbol{\nu}}(x) > 0$ sobre Γ;*
2. *se $-\Delta u + c(x)u \geq 0$ em Ω, então $u > 0$ e $u_{\boldsymbol{\nu}}(x) < 0$ sobre Γ.*

Teorema A.7 (Desigualdade de Harnack). *Suponhamos que $u \in C^2(\Omega)$, $u \geq 0$ satisfaz*

$$-\Delta u + c(x)u = 0, \;\; em \; \Omega,$$

então para toda a bola $B \subset \Omega$, existe uma constante C tal que

$$\sup_B u \leq C \inf_B u.$$

Demonstração. Cf. [13, pg. 351]. □

A.4 Problema de valores próprios

Consideremos o problema linear de valores próprios

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{A.2}$$

Teorema A.8. *Existe uma sequencia de valores próprios $\{\lambda_k\}$ para o problema (A.2) tais que*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$$

com

$$\lambda_k \to +\infty.$$

Denotamos por φ_1 a função própria correspondente ao valor próprio λ_1 tal que $\varphi_1(x) > 0$ em Ω e $\|\varphi_1\|_2 = 1$ e

$$\lambda_1 = \min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x = 1\right\}.$$

Denotamos por φ_i a função própria associada ao valor próprio λ_i tal que

$$\int_\Omega \varphi_i \varphi_h \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & i = h \\ 0 & i \neq h \end{cases}$$

Tomando $W_k = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_h \, \mathrm{d}x = 0, \; h = 1, \cdots, k-1\}$, λ_k é determinado por

$$\min\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x : u \in W_k, \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x = 1\right\}$$

Demonstração. Cf. [3] □

A.5 Espaços Sobolev em $\mathbb{R}^N$

A Teoria dos espaços de Sobolev pode ser estudada em [5], [13] ou [17].
Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, com fronteira de classe C^∞, $N \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, e $1 < p < \infty$. Então as seguintes injeções de Sobolev são contínuas:

$$\begin{aligned}
&\text{Se } \frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0, \text{ então } W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in \left[1, \frac{Np}{N-kp}\right]; \\
&\text{Se } \frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0, \text{ então } W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in \left[1, \infty\right); \\
&\text{Se } \frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0, \text{ então } W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha,\lambda}(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \lfloor k - N/p \rfloor$ e $\lambda \in (0,1)$ são tais que $\lambda \leq k - N/p - \alpha$. Em particular, a injeção de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para todo $q \in \left[1, 2^*\right]$, onde $2^* = \frac{N2}{N-2}$.

As seguintes injeções de Sobolev são compactas:

$$\begin{aligned}
&\text{Se } \frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0, \text{ então } W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in \left[1, \frac{Np}{N-kp}\right); \\
&\text{Se } \frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0, \text{ então } W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in \left[1, \infty\right); \\
&\text{Se } \frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0, \text{ então } W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \lfloor k - N/p \rfloor$. Em particular, a injeção de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta para todo $q \in \left[1, 2^*\right)$.

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{A.3}$$

Teorema A.9 (Teorema de Agmon, Douglas e Niremberg [1])**.** *Consideremos $f \in L^r(\Omega)$ com $r > 1$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema (A.3). Então $u \in W^{2,r}(\Omega)$. Além disso, se $f \in W^{k,r}(\overline{\Omega})$, então*

$$u \in W^{k+2,r}(\overline{\Omega}).$$

A.6 Resultados de Regularidade

Consideremos X um espaço normado, Y um aberto de X e o funcional $J : X \to \mathbb{R}$.

Definição A.6.1. *Dizemos que o funcional J é derivável-Gâteaux em $x_0 \in X$ com direção $h \in X$ se*

$$J'(x_0)h := \lim_{t \to 0} \frac{J(x_0 + th) - J(x_0)}{t}$$

Se o limite existir para todo o $h \in X$, então o funcional J é derivável-Gâteaux em x_0. Se $J'(x_0)$ tiver a propriedade mais forte

$$\lim_{h \to 0} \frac{|J(x_0 + h) - J(x_0) - J'(x_0)h|}{\|h\|} = 0,$$

então o funcional J é derivável-Fréchet.

Definição A.6.2. *Se para todo $x \in Y$ o funcional J é derivável-Fréchet e $x \mapsto J'(x)$ é contínua, então $J \in C^1(Y, \mathbb{R})$.*

Consideremos o seguinte problema, com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado com fronteira Γ regular e $N \geq 3$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{A.4}$$

Proposição A.6.3. *Consideremos a função $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e as constantes $p, q \geq 1$ e $d_1, d_2 \geq 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq d_1 + d_2 |s|^{p/q},$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x \in \overline{\Omega}$. Então para todo $x \in \Omega$ a função

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \to & L^q(\Omega) \\ u & \mapsto & f(x,u) \end{array}$$

é contínua.

Demonstração. Seja $u \in L^p(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x,u)|^q \,\mathrm{d}x &\leq \int_\Omega (d_1 + d_2 |u|^{p/q})^q \,\mathrm{d}x \\ &{}^{1}\leq 2^{q-1} \int_\Omega d_1^q + d_2^q |u|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega (1 + |u|^p) \,\mathrm{d}x < \infty, \end{aligned}$$

com $C > 0$. Portanto $f(x,u) \in L^q(\Omega)$.

Queremos provar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq \delta \implies \|f(x,u)\|_q \leq \varepsilon.$$

Pela continuidade de f, dado $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|u| \leq \delta_1 \implies |f(x,u)| \leq \varepsilon_1.$$

Consideremos ε_1 tal que $\varepsilon_1^q|\Omega| \leq \varepsilon^q/2$ e $\Omega_1 := \{x \in \overline{\Omega} : \; |u| \leq \delta_1\}$, então

$$\int_{\Omega_1} |f(x,u)|^q \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon_1^q|\Omega_1| \leq \varepsilon_1^q|\Omega| \leq \varepsilon^q/2.$$

Consideremos agora $\Omega_2 = \overline{\Omega}\backslash\Omega_1 = \{x \in \overline{\Omega} : \; |u| > \delta_1\}$, então

$$\delta_1^p|\Omega_2| = \int_{\Omega_2} \delta_1^p \leq \int_{\Omega_2} |u|^p \,\mathrm{d}x \leq \delta^p,$$

ou seja, $|\Omega_2| \leq (\delta/\delta_1)^p$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} |f(x,u)|^q \,\mathrm{d}x &\leq C \int_{\Omega_2} (1 + |u|^p) \,\mathrm{d}x \\
&= C(|\Omega_2| + \|u\|_p^p) \\
&\leq C(|\Omega_2| + \delta^p) \\
&\leq C((\delta/\delta_1)^p + \delta^p) \\
&= C\delta^p(1 + \delta_1^{-p}).
\end{aligned}$$

Escolhendo δ tal que $C\delta^p(1 + \delta_1^{-p}) \leq \varepsilon^q/2$, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_q &= \left(\int_\Omega f(x,u)^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_{\Omega_1} f(x,u)^q + \int_{\Omega_2} f(x,u)^q\right)^{1/q} \\
&\leq (\varepsilon^q/2 + \varepsilon^q/2)^{-q} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

como pretendido. $\square$

Proposição A.6.4. *Consideremos a função* $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$*, a primitiva* $F(x,s) = \int_0^s f(x,t) \,\mathrm{d}t$ *e as constantes* $d_1, d_2 > 0$ *e* $\sigma \in [1, 2^*)$*, tais que*

$$|f(x,s)| \leq d_1 + d_2|s|^{\sigma-1},$$

[1] Ver A.8.4.

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x \in \overline{\Omega}$. Então o funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F_\lambda(x,u)\,\mathrm{d}x$$

pertence a $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ e para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$J'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi - f(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Além disso, $\int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x$ é fracamente contínuo e $\int_\Omega f(x,u)\,\mathrm{d}x$ é compacto.

Demonstração. Cf. [25]. □

Corolário A.6.5. *Consideremos a função f definida na Proposição A.6.4 e a sucessão $\{u_n\}$ limitada em $H_0^1(\Omega)$ tal que $J'(u_n) \to 0$ então $\{u_n\}$ tem uma subsucessão convergente.*

Demonstração. Cf. [25]. □

Teorema A.10. *Consideremos a função f definida na Proposição A.6.4. Suponhamos que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ é um minimizante local para o funcional J na topologia C^1, i.e., existe uma constante $R > 0$ tal que*

$$J(u_0) \le J(u), \text{ para todo } u \in C_0^1(\overline{\Omega}),$$

com $\|u - u_0\|_{C^1} \le R$. Então u_0 é um minimizante local do funcional J em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Cf. [8]. □

A.7 *Bootstrap*

Teorema A.11. *Consideremos a função $f \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ e as constantes $d_1, d_2 > 0$ e $\sigma \in [0, 2^*-1)$, tais que*

$$|f(x,s)| \le d_1 + d_2|s|^\sigma,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x \in \overline{\Omega}$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ solução do problema (A.4). Então $u \in H_0^1(\Omega)$ é de facto uma solução clássica, i.e., $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Pela injeção contínua de Sobolev $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$, então pela Proposição A.6.3, a função $f(x,u(x)) \in L^{2^*/\sigma}(\Omega)$. Pelo Teorema A.9 concluímos que $u \in W^{2,2^*/\sigma}$. Assim analisemos três casos, de acordo com as imersões de Sobolev:

1. Se $\dfrac{\sigma}{2^*} - \dfrac{2}{N} < 0$, então $u \in C^{\alpha,\lambda}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha = \lfloor 2 - N\sigma/2^* \rfloor$ e $\lambda \in (0,1)$ são tais que $\lambda \le 2 - N\sigma/2^* - \alpha$.

2. Se $\dfrac{\sigma}{2^*} - \dfrac{2}{N} = 0$, então $u \in L^r(\Omega)$ com $r \in \big[1, \infty\big)$, logo pela Proposição A.6.3, a função $f \in L^{r/\sigma}(\Omega)$. Novamente pelo Teorema A.9, $u \in W^{2,r/\sigma}$. Escolhendo r suficientemente grande, tal que $\dfrac{\sigma}{r} - \dfrac{2}{N} < 0$, estamos nas condições anteriores.

3. Se $\dfrac{\sigma}{2^*} - \dfrac{2}{N} > 0$, então $u \in L^{q_1}(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{q_1} = \dfrac{\sigma}{2^*} - \dfrac{2}{N}$. Portanto, pela Proposição A.6.3, a função $f \in L^{q_1/\sigma}(\Omega)$, e pelo Teorema A.9 $u \in W^{2,q_1/\sigma}$.

Repetindo os três casos acima para $\dfrac{\sigma}{q_1} - \dfrac{2}{N}$, concluímos que existem $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in (0,1)$ tais que $u \in C^{\alpha,\lambda}(\overline{\Omega})$ ou $u \in W^{2,q_2/\sigma}$, onde $\dfrac{1}{q_2} = \dfrac{\sigma}{q_1} - \dfrac{2}{N}$. Usando este processo, denominado de *bootstrap*, construímos uma sequência $q_0, q_1, q_2, q_3, \cdots$, tal que $q_0 = 2^*$ e $\dfrac{1}{q_j} = \dfrac{\sigma}{q_{j-1}} - \dfrac{2}{N}$, para $j \geq 1$. Queremos ver que existe um j tal que $\dfrac{1}{q_j} < 0$. Temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q_j} = \frac{\sigma}{q_{j-1}} - \frac{2}{N} &= \sigma\Big(\frac{\sigma}{q_{j-2}} - \frac{2}{N}\Big) - \frac{2}{N} \\
&= \sigma^2\Big(\frac{1}{q_{j-2}}\Big) - \frac{2}{N}(1+\sigma) \\
&= \sigma^j\Big(\frac{1}{q_0}\Big) - \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{j-1}\sigma^i \\
&= \sigma^j\Big(\frac{1}{2^*}\Big) - \frac{2}{N}\Big(\frac{\sigma^j - 1}{\sigma - 1}\Big) \\
&= \sigma^j\Big(\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(\sigma-1)}\Big) + \frac{2}{N(\sigma-1)}.
\end{aligned}$$

Se $\sigma < 1$, então $\sigma^j \to 0$, quando $j \to \infty$, logo existe um j suficientemente grande tal que $\dfrac{1}{q_j} < 0$. Se $\sigma \in [1, 2^* - 1)$ observemos que

$$\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(\sigma-1)} < 0 \iff \frac{N-2}{2} < \frac{2}{\sigma - 1},$$

mas,

$$\sigma < 2^* - 1 \Rightarrow \sigma - 1 < 2^* - 2 \Rightarrow \frac{2}{\sigma-1} > \frac{2}{2^*-2} = \frac{2}{\frac{2N-2N+4}{N-2}} = \frac{N-2}{2}.$$

Portanto existe um j suficientemente grande tal que $\dfrac{1}{q_j} < 0$. Pela injeção de Sobolev existe um $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in (0,1)$ tais que $u \in C^{\alpha,\lambda}(\overline{\Omega})$. □

A.8 Outros resultados

Teorema A.12 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)**.** *Sejam $\{f_n\}$ uma sucessão de funções mensuráveis $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ tais que $f_n(x) \to f(x)$, p.q.t. $x \in \Omega$ e* *uma função mensurável* $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$*, com* $\int_\Omega g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ *e*

$$f_n(x) \leq g(x),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ *e p.q.t.* $x \in \Omega$*. Então*

$$\int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Cf. [21]. □

Lema A.8.1. *Seja* $u \in H^2(\omega)$ *e* $v \in H^1(\omega)$*, onde* ω *é um conjunto Lipschitz limitado. Então*

$$\int_\omega \nabla u \nabla v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\omega} u_{\boldsymbol{\nu}} v\,\mathrm{d}x - \int_\omega (\Delta u) v\,\mathrm{d}x,$$

onde $u_{\boldsymbol{\nu}}$ *denota a derivada direcional exterior de* u *em* ω*.*

Demonstração. Cf. [18]. □

Teorema A.13 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $p \in [1,\infty]$*,* p' *o conjugado de Hölder de* p *e as funções* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega)$*, então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg|\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Demonstração. Ver Brézis [5, pg. 92]. □

Proposição A.8.2 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $A, B \geq 0$*,* $p \in (1,\infty)$ *e* p' *o conjugado de Hölder de* p*, então*

$$AB \leq \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{p'}B^{p'}$$

Demonstração. A demonstação é consequência do facto da função logaritmica ser côncava:

$$\log\left(\frac{1}{p}A^p + \frac{1}{p'}B^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log A^p + \frac{1}{p'}\log B^{p'} = \log(AB).$$

□

Lema A.8.3. *Se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H_0^1(\Omega)$*, então* $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$*.*

Demonstração. Cf. [5]. □

Proposição A.8.4. *Sejam* $a,\ b,\ s > 0$ *então*

$$2^{-(s-1)^-}(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq 2^{(s-1)^+}(a^s + b^s). \tag{A.5}$$

Demonstração. Observemos que (A.5) é equivalente a encontrar o máximo e mínimo da função

$$g(t) = \frac{(1+t)^s}{1+t^s}, \quad \text{para todo } s > 0.$$

Facilmente vemos que $g(0) = 1$, $g(1) = 2^{s-1}$, $\lim_{t\to\infty} g(t) = 1$ e

$$g'(t) = \frac{s(1+t)^{s-1}(1-t^{s-1})}{(1+t^s)^2},$$

donde $t = 1$ é a única raiz positiva de g'. Por fim, basta observar que se $s > 1$, então $g(1)$ é máximo e se $s < 1$, então $g(1)$ é mínimo. □

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, u \not\equiv 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \tag{A.6}$$

Teorema A.14 (Brézis-Oswald [10])**.** *Seja $f_\lambda : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função tal que*

1. *$x \mapsto f(x,s)$ pertence a $L^\infty(\Omega)$, para todo $s > 0$,*
2. *$s \mapsto f(x,s)$ é contínua em $\mathbb{R}^+$, p.q.t. $x \in \Omega$,*
3. *$s \mapsto f(x,s)/s$ é decrescente para $s > 0$,*
4. *existe uma constante $C > 0$ tal que $f(x,s) \leq C(s+1)$ para todo $s > 0$ e p.q.t. $x \in \Omega$.*

Além disso,

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{s} \in (-\infty, \infty] \quad e \quad \lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} \in [-\infty, \infty)$$

Então o problema A.6 tem pelo no máximo uma solução.

Lema A.8.5 (Lema de Brézis-Lieb [7])**.** *Consideremos a sucessão $\{u_n\} \in L^p(\Omega)$, com $p \in [1,\infty)$ tal que*

- *$\|u_n\|_p^p \leq C$, com $C \in \mathbb{R}$,*
- *$u_n \to u$, p.q.t. $x \in \Omega$.*

Então

$$\lim \|u_n - u\|_p^p = \|u_n\|_p^p - \|u\|_p^p.$$

Teorema A.15. *Consideremos o funcional $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, que satisfaça a condição de Palais-Smale. Suponhamos que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ é um minimizante local, i.e., existe uma constante $R > 0$ tal que*

$$J(u_0) \leq J(u) \text{ com } \|u - u_0\| \leq R.$$

Então, para cada $R_0 \in (0, R]$, segue uma das alternativas:

1. *ou existe uma constante* $\alpha \in (0, R_0)$ *tal que*

$$\inf\{J(u) : \|u - u_0\| = \alpha\} > J(u_0);$$

2. *ou para cada* $\alpha \in (0, R_0)$, *o funcioanal* J *tem um mínimo local* $u_\alpha \in H_0^1(\Omega)$ *com* $\|u_\alpha - u_0\| = \alpha$ *e* $J(u_\alpha) = J(u_0)$.

Demonstração. Cf. [14]. □

Bibliografia

[1] Agmon, S., Douglis, A., Niremberg, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I*, Comm. Pure Appl. Math. 12, 623-727 (1959).

[2] Ambrosetti, A., Brézis, H., Cerami, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122, 519–543 (1994).

[3] Ambrosetti, A, Malchiodi, A., *Nonlinear Analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[4] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P., *Dual variational methods in critical points theory and applications*, J. Funct. Anal. 14, 349–381 (1973).

[5] Brézis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.

[6] Brézis, H., Kato, T., *Remarks on the Schördinger operator with singular complex potentials*, J. Math. Pures Appl. 58, 137-151 (1979).

[7] Brézis, H., Lieb, E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88, 486–490 (1983).

[8] Brézis, H., Nirenberg, L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36, 437–477 (1983).

[9] Brézis, H., Nirenberg, L., *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris 317, 465-472 (1993).

[10] Brézis, H., Oswald, L., *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. 10, 55-64 (1986).

[11] Brown, K. J., Wu, T.-F., *A Fibering map approach to a semilinear elliptic boundary value problem*, Electronic J. of Differencial Equations, 69, 1-9 (2007).

[12] Drabek, P., Pohozaev, S. I., *Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A, 127, 703-726 (1997).

[13] Evans, L. C., *Partial differential equations*, Second edition, Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[14] de Figueiredo, D., *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Inst. Fund. Res. Lectures Math. Phys. 81, Springer (1989).

[15] de Figueiredo, D., Gossez, J.-P., Ubilla, P., *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*, J. Funct. Anal. 199, 452–467 (2003).

[16] de Figueiredo, D., Gossez, J.-P., Ubilla, P., *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity*, J. Eur. Math. Soc. 8, 269-286 (2003).

[17] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Second Edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[18] Grisvard, P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, London, 1985.

[19] Nehari, Z., *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 95, 101-123 (1960).

[20] Nehari, Z., *Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations*, Acta Math. 105 141-175 (1961).

[21] Machado, A., *Medida e integração*, Textos de Matemática, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, 2011.

[22] Sanchez, L., *Métodos da teoria de pontos críticos*, Textos de Matemática, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, 1993.

[23] de Paula, J. C., *Existência de soluções para um problema elíptico usando a aplicação fibração* (dissertação de mestrado), Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, Brasil, 2011.

[24] Qing, H., Lin, F., *Elliptic Partial Differential Equations: Second Edition*, Courant Lecture Notes, vol. 1.R, 2011.

[25] Rabinowitz, P. H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.

[26] Struwe, M., *Variational Methods, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Fourth edition, Springer, Berlin, 2008.

[27] Trudinger, N.S., *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Applied Math. 20, 721-747 (1967).

[28] Willem, M. *Minimax Theorems*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 24, Birkhäuser, Boston, 1996.